Monografías del IMCA

Aris Daniilidis

Espacios métricos

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

IMCA

Fondo Editorial EDUNI

Espacios métricos
Monografías del IMCA Nueva Serie N° 2

Impreso en el Perú
Printed in Peru

Primera edición, octubre de 2020
500 ejemplares

Universidad Nacional de Ingeniería
Instituto de Matemática y Ciencias Afines, IMCA
Calle Los Biólogos 245, Urb. San Cesar, La Molina
Telfs. (+51)-1-3491892 / (+51)-1-3499838
Fondo Editorial - EDUNI
Av. Túpac Amaru 210, Rímac – Lima
Pabellón Central / Sótano
Telfs. 4814196 / 4811070 anexos 7500 y 7501

Dr. Roger Metzger Alván
Coordinaciones IMCA

Prof. Alvaro Montaño Freire
Jefe Fondo Editorial EDUNI

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº 2020-09654

ISBN 978-612-47971-1-8

Se terminó de imprimir en el mes de diciembre de 2020 en
Imprenta Fabet EIRL Jr. San Juan de Dios Mz. K Lote 15, Urb. San Juan de Dios,
San Martín de Porres, Lima

Espacios Métricos

Aris Daniilidis

Fondo Editorial EDUNI

IMCA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Descripción del apunte

Este material corresponde a la primera parte del curso MA3801 (Análisis) que dicté el otoño de 2014 y de 2016 en la Universidad de Chile. El curso se dicta habitualmente en el primer semestre (otoño), tiene una duración de 15 semanas y está organizado en 3 clases de cátedra y una clase de auxiliar por semana. Está orientado a alumnos del tercer año de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, recién egresados del Plan Común, que eligen como carrera la *Ingeniería Civil Matemática*.
El curso MA3801 se divide en tres partes:

1. Espacios métricos (6 semanas)   (presente apunte)

2. Topología general (6 semanas)

3. Introducción al Análisis Funcional (3 semanas)

Agradecimientos

La base de este material ha sido el apunte de cátedras del curso 2014 que tomó Christopher Cabezas (alumno del curso en 2014 y auxiliar del mismo curso en 2016). El apunte ha sido completado con material adicional de las clases de auxiliar y los temas de controles de ambos años 2014 y 2016. Aprovecho para agradecer a Christopher Cabezas por la elaboración del apunte inicial y su dedicación al curso, así que a todo el equipo de mis auxiliares del año 2014 (Felipe Subiarte, Rodolfo Gutiérrez y Camila Romero) y de 2016 (Roberto Bobadilla, Christopher Cabezas, Cristobal Valenzuela) por su dedicación y compromiso al curso. Por último, mis agradecimientos al alumno del curso 2016 Pierre Vandaele (alumno de doble titulación de la *École Centrale de Paris*) por la revisión atentiva de la version final, a Diana Narvaez (alumna del programa doctoral del Departamento de Ingeniería Matemática) y a mi colaboradora Estibalitz Durand Cartagena (UNED, Madrid) por sus ayudas técnicas en la elaboración del material.

La materia más avanzada de este apunte se ha utilizado para un Minicurso de Master que dicté en el IMCA (Lima) en octubre de 2019.

Aris Daniilidis, Profesor
Departamento de Ingeniería Matemática

Índice general

1 Axioma de Elección, Cardinales, Ordinales

En este capítulo, presentaremos brevemente la teoría de Zermelo-Fraenkel enriquecida por el llamado Axioma de Elección y sus consecuencias en la matemática moderna. Así mismo daremos una mirada a la aritmética de los cardinales y nos familiarizaremos con la teoría de los ordinales.

1.1. Preliminares

Una parte de la teoría de conjuntos se puede considerar de conocimiento general. En particular, la notación $\varnothing$ para el conjunto vacío, la relación de pertenencia $x \in X$, las operaciones $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$ y la diferencia simétrica $X \triangle Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. La notación $X \uplus Y$ indica que la unión de los conjuntos X y Y es disjunta, es decir $X \cap Y = \varnothing$. Si un conjunto X se puede escribir como una unión disjunta de una familia (finita o infinita) de conjuntos no vacíos $\{A_i\}_{i \in I}$, entonces decimos que la familia $\{A_i\}_{i \in I}$ es una partición de X.

Dados dos conjuntos N, X, denotaremos por X^N el conjunto de todas las funciones $f \colon N \to X$, es decir

$$X^N = \{ f : N \to X |\ f \text{ es función} \}.$$

Si $X \neq \varnothing$, cada subconjunto A de X se puede representar por su función característica $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Mediante esta representación, el conjunto $\mathcal{P}(X)$ de todos los subconjuntos de X se puede identificar con el conjunto $2^X := \{0, 1\}^X$ de las funciones $f : X \to \{0, 1\}$. Por último, el producto cartesiano $X \times Y$ de dos conjuntos X y Y se define como el conjunto de pares $\{x, y\}$, con $x \in X$ y $y \in Y$, y se puede identificar con el conjunto de funciones $f : \{1, 2\} \to X \cup Y$ con la propiedad $f(1) \in X$ y $f(2) \in Y$. En efecto, una función

$f \in (X \cup Y)^{\{1,2\}}$ queda determinada por sus valores $\{f(1), f(2)\}$. La siguiente definición, extiende el concepto de producto cartesiano para una familia cualquiera de conjuntos no vacíos.

Definición 1.1.1

(Producto cartesiano) Sea $A \neq \varnothing$ y $(X_a)_{a\in A}$ una familia de conjuntos no vacíos. Se define el *producto cartesiano* como el conjunto

$$\prod_{a\in A} X_a = \left\{ f : A \to \bigcup_{a\in A} X_a \,\middle|\, \forall a \in A,\ f(a) \in X_a \right\}.$$

Es fácil ver que si el conjunto A tiene n elementos, entonces la definición anterior es compatible con la definición clásica de producto cartesiano $X_1 \times \cdots \times X_n$.

1.2. Relaciones de equivalencia y de orden

Sea X un conjunto no vacío. Un subconjunto $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ se llama una *relación sobre* X. Si $(x, y) \in \mathcal{R}$ decimos que x está relacionado con y, y denotamos $x\mathcal{R}y$. Así mismo utilizaremos la notación $(X, \mathcal{R})$ para referirnos al conjunto X equipado con la relación $\mathcal{R}$.

En este capítulo, consideraremos dos tipos de relaciones muy importantes, la relación de equivalencia, que se suele denotar por $\sim$, y la relación de orden, que se suele denotar por $\leq$ (o a veces $\preceq$, $\subseteq$ etc).

1.2.1. Relación de equivalencia

Una relación de equivalencia sobre X, es un tipo particular de relación $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ (que tradicionalmente anotamos por $\sim$) que satisface las condiciones (i)–(iii) de la siguiente definición:

Definición 1.2.1

(Relación de equivalencia) Sea X un conjunto. Diremos que una relación $\sim$ sobre X es *una relación de equivalencia*, si satisface las siguientes propiedades:

(i) (Refleja) para todo $x \in X$ se tiene que $x \sim x$.

(ii) (Simétrica) para todo $x, y \in X$ se tiene que $x \sim y$ implica $y \sim x$.

(iii) (Transitiva) para todo $x, y, z \in X$ se tiene que si simultáneamente se cumplen $x \sim y$ e $y \sim z$, entonces $x \sim z$.

Definición 1.2.2

(Espacio cociente) Sea $(X, \sim)$ una relación de equivalencia. Definimos el *espacio cociente* (que denotaremos por $X/\sim$), como el conjunto de todas las clases de equivalencia formadas por $\sim$, es decir

$$X/\sim \; = \{[x] \mid x \in X\}\,, \text{ donde } [x] = \{x' \in X \mid x' \sim x\}\,.$$

Las relaciones de equivalencia son importantes por la siguiente proposición.

Proposición 1.2.3 (Partición de un conjunto)

(i) Sea $(X, \sim)$ una relación de equivalencia. Entonces las clases de equivalencia (i.e. los elementos del conjunto $X/\sim$) definen una partición en X, es decir

$$X = \dot{\bigcup_{A \in X/\sim}} A.$$

(ii) Recíprocamente, si $X = \dot{\bigcup}_{i \in I} B_i$ es una partición de X, entonces existe una relación de equivalencia $\sim$ sobre el conjunto X tal que los conjuntos B_i son precisamente las clases de equivalencia de esta equivalencia.

Demostración: El hecho que las clases de equivalencia definen una partición es una consecuencia directa de la definición de relación de equivalencia.

(ii). Supongamos ahora que $X = \dot{\bigcup}_{i \in I} B_i$. Definamos la relación de equivalencia como sigue:

$$x \sim y \text{ si y sólo si } \exists i \in I, \text{ tal que } x, y \in B_i. \qquad \square$$

1.2.2. Relación de orden

A continuación veremos otro tipo importante de relación sobre un conjunto X, la relación de orden.

Definición 1.2.4

(Relación de orden) Una *relación de orden (parcial)* sobre X, es una relación $\leq$ tal que cumple las siguientes propiedades:

(i) (Refleja) para todo $x \in X$ se tiene que $x \leq x$.

(ii) (Antisimétrica) para todo $x, y \in X$ se tiene que $x \leq y$ e $y \leq x$ implica $x = y$.

(iii) (Transitiva) para todo $x, y, z \in X$ se tiene que si simultáneamente se cumple que $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

Si además, la relación $\leq$ cumple

(iv) para todo $x, y \in X$ se tiene $x \leq y$ ó bien $y \leq x$

entonces hablamos de una *relación de orden lineal (total)*.

Observación 1.2.5 (Preorden) Una relación $\preceq$ en un conjunto X que cumple solo las propiedades (i) y (iii) se llama relación de *preorden*. En este caso, podemos definir la siguiente relación (se comprueba fácilmente que es una relación de equivalencia)

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \preceq y \\ y \preceq x \end{cases} \tag{1.1}$$

Pasando al espacio cociente $\widehat{X} := X/\sim$ se puede comprobar que la relación

$$[x] \leq [y] \quad \Longleftrightarrow \quad x' \preceq y' \text{ donde } x' \in [x]\,,\ y' \in [y]$$

está bien definida (*i.e.* no depende de la elección de los representantes) y es una relación de orden.

A veces, para insistir que un orden $\leq$ puede no satisfacer la propiedad (iv), hablamos de *orden parcial*. Si $(X, \leq)$ es un conjunto ordenado y $Y \subseteq X$, la relación inducida en Y es claramente también una relación de orden. Cuando consideramos a Y como un conjunto ordenado, salvo que se diga lo contrario, siempre será con el orden inducido. Las siguientes definiciones serán de utilidad más adelante en este capítulo.

Definición 1.2.6

(Cadena) Sea $(X, \leq)$ un conjunto (parcialmente) ordenado. Un conjunto $Y \subseteq X$ se dice linealmente (o totalmente) ordenado, si la restricción del orden $\leq$ en Y, es decir $\big(Y, \leq|_{Y\times Y}\big)$, es un orden total, es decir, que también cumple la propiedad (iv) de la Definición 1.2.4. En este caso, se dice que Y es una *cadena* en $(X, \leq)$.

Dado un conjunto ordenado $(X, \leq)$, un elemento $\bar{x}$ se dice *mínimo* (resp. *máximo*), si para cada $x \in X$ se tiene que $\bar{x} \leq x$ (resp. $x \leq \bar{x}$). Observamos que si existen dichos elementos, entonces son únicos. A continuación introducimos unos conceptos similares a las que acabamos de mencionar.

Definición 1.2.7

(Elemento maximal/minimal) Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado. Un elemento $x \in X$ se dice:

(i) *minimal* si para todo $y \in X$, la relación $y \leq x$ implica $x = y$;

(ii) *maximal* si para todo $y \in X$, la relación $x \leq y$ implica $x = y$.

No hay que confundir un elemento minimal con el elemento mínimo para conjuntos parcialmente ordenados. Un elemento mínimo, si existe, es siempre comparable con todos los otros elementos del conjunto X (y es inferior), mientras que un elemento minimal es inferior sólo a aquellos elementos de X con los cuales se puede comparar. Si X dispone de un elemento mínimo, entonces este es único, minimal y no hay otros elementos minimales. Pero si el orden sobre X no es total, y si no existe un mínimo, entonces X puede disponer de varios elementos minimales. La misma discusión se puede repetir para elementos maximales y el elemento máximo de un conjunto. El siguiente ejemplo ilustra los conceptos anteriores.

Ejemplo 1.2.8 Consideremos el conjunto $2^{\mathbb{N}}$ con el orden dado por la inclusión. Sea $A = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 2\}\}$ con el orden inducido. De la definición, es fácil ver que $\{1\}$ y $\{0, 2\}$ son elementos maximales en A, pero no existe un elemento máximo. Luego $\{0\}, \{1\}, \{2\}$ son elementos minimales y tampoco existe elemento mínimo.

A continuación se presentan algunos ejemplos de relaciones de orden.

Ejemplo 1.2.9 (i) El conjunto de los reales equipado con el orden habitual $(\mathbb{R}, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado. Es obvio que $\mathbb{R}$ con este orden no tiene elemento máximo o mínimo, y por lo tanto no tiene elementos maximales o minimales. (Como $(\mathbb{R}, \leq)$ es un orden total, las nociones de elemento máximo/maximal, y resp. mínimo/minimal coinciden.)

(ii) Sea C un cono convexo de un espacio vectorial E, es decir

$$C + C \subseteq C \;\text{ y }\; \lambda C \subseteq C \;(\lambda > 0).$$

Supongamos además que el cono C no contiene lineas, es decir

$$C \cap (-C) = \{0\}.$$

Entonces el cono C define un orden parcial sobre E mediante la relación:

$$x \leq_C y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x \in C.$$

Caso particular: Sea $E = \mathbb{R}^n$ y $C = \mathbb{R}^n_+$. El orden que se define por el cono $\mathbb{R}^n_+$ es el siguiente: sean $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ dos elementos de $\mathbb{R}^n$. Se tiene que:

$$x \leq_{\mathbb{R}^n_+} y \quad \Longleftrightarrow \quad x_i \leq y_i \ \text{ para todo}\, i \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

(iii) Sea $\Omega \neq \varnothing$. Entonces $(2^\Omega, \subseteq)$ es un orden (parcial). En este caso, existe un elemento mínimo (el conjunto vacío) y un elemento máximo (el conjunto Ω).

(iv) (Orden lexicográfico) Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la siguiente relación:

$$x \leq_{\text{lex}} y \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 < y_1 & \text{o bien} \\ (x_1 = y_1) \ \ \& \ \ (x_2 \leq y_2) \end{cases}$$

Se tiene que $\leq_{\text{lex}}$ es un orden total, sin elementos máximo o mínimo.

(v) (Árbol) Un *árbol* $(T, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado que dispone de un elemento mínimo x_0 y que cumple las siguientes propiedades:

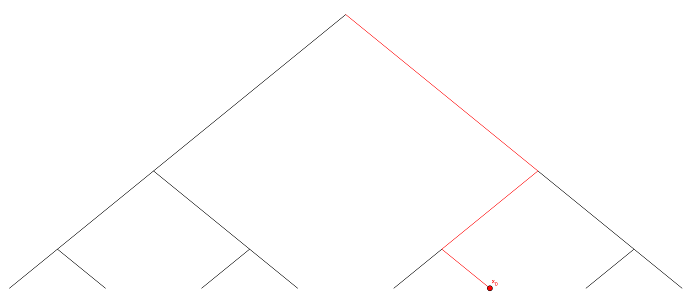

Figura 1.1: Un árbol diádico.

(a) Cada elemento $x \in T$ distinto a x_0 tiene un único antecesor inmediato.

(b) Cada elemento $x \in T$ se une de manera única a x_0 mediante una cadena finita formada por antecesores inmediatos sucesivos.

La noción de árbol es una noción muy importante y tiene numerosas aplicaciones en topología y análisis funcional. La principal característica de un árbol es que su potencial complejidad se puede aumentar siempre en un sentido del orden (en el sentido creciente), mientras que en el otro sentido (el sentido decreciente) el árbol presenta una estructura muy simple.

A continuación, nos interesamos en un cierto tipo de orden total de mucha importancia en este capítulo.

Definición 1.2.10

(Buen orden) Un conjunto $X \neq \varnothing$ se dice *bien ordenado* por el orden $\leq$ si cada subconjunto $B \neq \varnothing$ de X tiene un elemento mínimo, es decir

$$\forall B \subseteq X,\ B \neq \varnothing \implies \exists b \in B, \forall x \in B, b \leq x.$$

Presentamos enseguida dos ejemplos típicos de conjuntos bien ordenados.

Ejemplo 1.2.11 (i). El conjunto $\mathbb{N}$ (números naturales[1]) con el orden habitual es un conjunto bien ordenado (véase Teorema 1.3.3 más adelante).

(ii). Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todas las palabras, es decir, las sucesiones finitas de letras del alfabeto, ordenadas por cardinalidad, luego lexicográficamente (para palabras del mismo número de letras). Es fácil ver que $\mathcal{A}$ es bien ordenado. El elemento mínimo es la palabra vacía (es decir, la palabra con 0 letras).

Proposición 1.2.12 *Sea $(X, \preceq)$ un conjunto bien ordenado. Entonces:*

(i) $(X, \preceq)$ *está totalmente ordenado.*

(ii) *(Existencia del sucesor inmediato.) Sea $x \in X$ un elemento diferente del máximo. Entonces x tiene un sucesor inmediato x^+, es decir, existe un elemento $x^+ \neq x$ tal que $x \preceq x^+$ y no existen elementos $z \in X \setminus \{x, x^+\}$ tal que $x \preceq z \preceq x^+$.*

DEMOSTRACIÓN: (i) Sean $x, y \in X$ dos elementos arbitrarios. Hay que mostrar que son comparables. Para hacer eso, basta considerar el conjunto $A = \{x, y\}$ y aplicar la Definición 1.2.10. Se deduce así que uno de los elementos x, y es el mínimo del conjunto A, es decir, dicho elemento es (comparable e) inferior al otro elemento de A.

(ii) Sea $x \in X$ diferente del máximo (si este último existe). Entonces el conjunto

$$A = \{y \in X \mid (x \preceq y) \ \wedge \ (y \neq x)\}$$

no es vacío, por lo cual debe tener un elemento mínimo (por la Definición 1.2.10). Es fácil ver que este elemento es el sucesor inmediato de x. $\square$

[1] En este capítulo, el conjunto $\mathbb{N}$ se toma sin el elemento 0.

Observación 1.2.13 (i) Un orden total no garantiza la existencia de sucesores inmediatos (véase por ejemplo $(\mathbb{R}, \leq)$). Por lo tanto, un conjunto totalmente ordenado, no es necesariamente bien ordenado.

(ii) En el Ejemplo 1.2.11 los elementos de los conjuntos bien ordenados $\mathbb{N}$ y $\mathcal{A}$ (salvo el elemento mínimo), también tienen antecesor inmediato. Sin embargo, en general eso no es cierto para conjuntos bien ordenados, como veremos en la Sección 1.7.

Para poder estudiar los diferentes tipos de relaciones de orden, necesitamos identificar conjuntos ordenados equivalentes. Este estudio se efectúa mediante *morfismos de órdenes*, es decir, funciones entre conjuntos ordenados que respetan las estructuras de orden.

Definición 1.2.14

(Función isótona) Sean $(X, \leq_X)$, $(Y, \leq_Y)$ dos conjuntos ordenados. Una función $f : X \to Y$ se dice *isótona* si para todo $a, b \in X$ se tiene que

$$a \leq_X b \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(a) \leq_Y f(b).$$

Si además f es una biyección, entonces hablamos de un *isomorfismo de órdenes*.

A continuación, presentamos un ejemplo de identificación de estructura mediante un isomorfismo de ordenes.

Ejemplo 1.2.15 Sea $X := \mathbb{N} \times [0, 1)$ equipado con el orden lexicográfico, es decir

$$(n, t) \preceq (n', t') \iff \begin{cases} n < n' & \text{o bien} \\ n = n' & \& \quad t \leq t' \end{cases}$$

Mostramos que $(X, \preceq)$ es el mismo tipo de orden que $(\mathbb{R}_+, \leq)$. En efecto, la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times [0, 1) &\to \mathbb{R}_+ \\ (n, t) &\mapsto f(n, t) = n + t - 1 \end{aligned}$$

es biyectiva e isótona.

1.3. Principio de inducción

A continuación definimos formalmente el conjunto de los naturales (suponiendo que $\mathbb{R}$ esté definido), el cual denotaremos por $\mathbb{N}$. Para ello comenzaremos con la siguiente definición.

Definición 1.3.1

(Conjunto inductivo) Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se dice *inductivo*, si

(i) $1 \in A$.

(ii) Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$x \in A \quad \Longrightarrow \quad x+1 \in A.$$

El conjunto $\mathbb{R}$ es trivialmente inductivo (y obviamente, el conjunto inductivo más grande). Observamos ahora que la unión (resp. la intersección) de una familia de conjuntos inductivos es un conjunto inductivo. Definimos a continuación el conjunto $\mathbb{N}$ como el conjunto inductivo más pequeño, es decir

$$\mathbb{N} = \bigcap \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ es inductivo}\}. \tag{1.2}$$

Algunas propiedades inmediatas de $\mathbb{N}$:

(a) $\mathbb{N}$ es inductivo.

(b) Si $\Gamma \subseteq \mathbb{N}$ es inductivo, entonces $\Gamma = \mathbb{N}$.

Una consecuencia de (a) es que $\mathbb{N}$ contiene todos los números naturales. En efecto, como $1 \in \mathbb{N}$ se deduce que $2 = 1+1 \in \mathbb{N}$, luego $3 = 2+1 \in \mathbb{N}$ e iterando $n-1$ veces concluimos que $n \in \mathbb{N}$. Observando que $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ es un conjunto inductivo, se deduce fácilmente que $\mathbb{N}$ tiene como elemento mínimo el 1 (con respecto al orden que le hereda $\mathbb{R}$). En el Teorema 1.3.3 veremos que en realidad $(\mathbb{N}, \leq)$ es bien ordenado. Para eso, necesitaremos primero la siguiente proposición.

Proposición 1.3.2 *(i) Sea A un conjunto inductivo de $\mathbb{R}$. Si existe $\bar{x} \in A$, $\bar{x} \neq 1$ tal que $\bar{x} - 1 \notin A$, entonces el conjunto*

$$\tilde{A} := A \setminus \{\bar{x}\}$$

es inductivo.

(ii) El conjunto $\mathbb{N}$, definido por (1.2), coincide con el conjunto de los números naturales.

DEMOSTRACIÓN: (i) Si $\tilde{A}$ no fuera inductivo, entonces existiría un elemento $x \in \tilde{A} \subseteq A$ tal que $x+1 \notin \tilde{A}$. Como A es inductivo, $x+1 \in A \setminus \tilde{A}$, por lo tanto se tiene que $x+1 = \bar{x}$. Lo anterior implica $\bar{x} - 1 = x \in \tilde{A}$, lo que es una contradicción.

(ii) Supongamos que existe $x \in \mathbb{N}$, $x > 1$ que no es un número natural. Tomando $n := [\|x\|]$ (la parte entera de x) se tiene que $n < x < n+1$. Por (i) se deduce que $x - 1 \in \mathbb{N}$, y despues de n iteraciones, que $x - (n+1) \in \mathbb{N}$, lo que contradice que $\min \mathbb{N} = 1$. $\square$

Introducimos ahora la siguiente notación. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\mathbb{N}_n := \{x \in \mathbb{N} : x \leq n\} = \{1, \ldots, n\}.$$

El siguiente resultado es fundamental.

TEOREMA 1.3.3

$(\mathbb{N}, \leq)$ es bien ordenado.

DEMOSTRACIÓN: Demostraremos el teorema en dos etapas.

Etapa 1: Mostramos primero que para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\mathbb{N}_n$ es bien ordenado, es decir, cada subconjunto de $\{1, \ldots, n\}$ tiene un elemento mínimo.

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathbb{N}_n$ es bien ordenado$\}$. Observamos que $A \neq \varnothing$, pues $1 \in A$. Supongamos que $n_0 \in A$, y mostremos que $n_0 + 1 \in A$. En efecto, sea $B \subseteq \{1, \ldots, n_0 + 1\}$. Tenemos dos casos:

- Si se tiene que $B_1 := B \setminus \{n_0 + 1\} \neq \varnothing$ entonces $B_1 \subseteq \{1, \ldots, n_0\}$, tiene mínimo por hipótesis inductiva. Luego se tiene que $\min B_1 = \min B$.

- Si $B \setminus \{n_0 + 1\} = \varnothing$ entonces $B = \{n_0 + 1\}$, por lo tanto existe el mínimo (al ser B un conjunto de un solo elemento).

Tenemos entonces que $n_0 \in A \implies n_0 + 1 \in A$, y como $1 \in A$ concluimos que A es inductivo. Como $A \subseteq \mathbb{N}$, se concluye que $A = \mathbb{N}$.

Etapa 2: Sea $D \neq \varnothing, D \subseteq \mathbb{N}$. Sea $n_0 \in D$. Entonces $D_1 := \{1, \ldots, n_0\} \cap D \neq \varnothing$. Como $D_1 \subseteq \{1, \ldots, n_0\}$, el conjunto D_1 tiene mínimo (*c.f.* Etapa 1). Se tiene entonces que $\min D_1 = \min D$. $\square$

Una consecuencia directa del buen ordenamiento de $\mathbb{N}$ es el *principio de inducción fuerte.*

TEOREMA 1.3.4

(Principio de Inducción Fuerte) Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ un conjunto no vacío. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\{1, \ldots, n\} \subseteq A \implies n + 1 \in A, \tag{1.3}$$

entonces $A = \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $A \neq \mathbb{N}$. Entonces A no es inductivo, es decir, existe $n \in A$ con $n+1 \notin A$. Sea n_0 el mínimo $n \in \mathbb{N}$ con la anterior propiedad (aquí se utiliza que $\mathbb{N}$ está bien ordenado). En particular, $\{1, \ldots, n_0\} \subseteq A$ y se obtiene por (1.3) que $n_0 + 1 \in A$, lo que es una contradicción. $\square$

NB. El principio de Inducción fuerte se puede enunciar mediante la noción de *segmento inicial* (a veces decimos simplemente *segmento* o *sección*), que se define para cada $n \in \mathbb{N}$ como sigue:

$$I_n := \{m \in \mathbb{N} :\ m < n\} = \mathbb{N}_n \setminus \{n\}. \tag{1.4}$$

El Teorema 1.3.4 entonces se puede reformular de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{c} A \subseteq \mathbb{N} \\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ tal que } I_n \subseteq A \Rightarrow n \in A \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad A = \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

En efecto, como $I_1 = \varnothing \subseteq A$, se deduce que $1 \in A$, por lo tanto (1.5) es equivalente a (1.3). Sin embargo, considerando conjuntos bien ordenados arbitrarios, es precisamente la formulación (1.5) la que se puede extender para establecer un principio semejante, llamado *inducción transfinita* (*c.f.* Teorema 1.7.2).

1.4. Axiomas de Zermelo-Fraenkel

Hasta aquí, hemos podido definir ciertos conceptos a través de objetos que llamamos *conjuntos*. Sin embargo, no tenemos una definición clara sobre lo que realmente es un conjunto. Idealmente nos gustaría asociar a cada propiedad p, un conjunto A que contenga todos los elementos que cumplan la propiedad p, es decir, $A = \{x : p(x)\}$. El problema con esta definición es que no a todas las propiedades se les puede asignar un conjunto, una lección muy bien enseñada por *Bertrand Russell*, quien en 1901, propuso un contraejemplo conocido hoy como la *paradoja de Russell* o la *paradoja del barbero* que demostró que la teoría de conjuntos formulada por *Cantor* y *Frege* era contradictoria.

El contraejemplo de Russell es el siguiente: Consideremos p la propiedad siguiente

$$p(x) = (x \text{ es un conjunto}) \wedge (x \notin x),$$

y supongamos que existe un conjunto $\mathcal{R}$ asociado a esta propiedad. No es difícil ver que se cumple la siguiente equivalencia

$$\mathcal{R} \in \mathcal{R} \iff \mathcal{R} \notin \mathcal{R}.$$

De esta forma fue necesario desarrollar una teoría axiomática de conjuntos que evitara este tipo de paradojas. Fue así como *Ernst Zermelo* y *Adolf Fraenkel*, postularon unos (al principio) nueve axiomas que sirven para definir conjuntos de forma "permitida".

Finalizaremos esta sección dando un vistazo a la axiomática de Zermelo-Fraenkel.

Definición 1.4.1

(Axiomática de Zermelo-Fraenkel) Los axiomas de Zermelo-Fraenkel son los siguientes:

(i) *Axioma de Extensión o Extensionalidad.* Este axioma establece que dos conjuntos X y Y son iguales si tienen los mismos elementos, es decir,

$$\forall X,\ \forall Y\,(\forall x\,(x \in X \iff x \in Y) \implies X = Y)\,.$$

(ii) *Axioma del conjunto vacío.* Este axioma garantiza la existencia de un conjunto (que llamaremos conjunto vacío y denotamos por $\varnothing$) que no contiene elementos, es decir,

$$\exists X,\ \forall x\,(x \notin X)\,.$$

(iii) *Axioma de Pares.* Este axioma establece que para cualquier par de conjuntos X y Y, existe un conjunto, tal que los únicos elementos que contiene son X y Y, es decir,

$$\forall X,\ \forall Y,\ \exists Z,\ \forall W\,(W \in Z \iff (W = X) \vee (W = Y))\,.$$

(iv) *Axioma de la unión.* Si X es una colección de conjuntos, entonces existe un conjunto cuyos elementos son los elementos de los conjuntos que contiene X, es decir,

$$\forall X,\ \exists Y,\ \forall Z\,(Z \in Y \iff \exists W\,(Z \in W \wedge W \in X))\,.$$

(v) *Axioma del Conjunto Potencia.* Si X es un conjunto, entonces existe un conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de X (que denotamos por 2^X o $\mathcal{P}(X)$), es decir,

$$\forall X,\ \exists Y,\ \forall Z\,(Z \in Y \iff Z \subseteq X)\,.$$

(vi) *Axioma de Separación.* Si $\varphi(x)$ es una propiedad y X es un conjunto, entonces existe un conjunto Y cuyos elementos son aquellos elementos de X que verifican $\varphi(x)$, es decir,

$$\forall X,\ \exists Y,\ \forall x\,(x \in Y \iff x \in X \wedge \varphi(x))\,.$$

(vii) *Axioma de Regularidad.* Todo conjunto no vacío contiene un elemento con el que no comparte ningún elemento, es decir,

$$\forall X,\ \exists Y\,(Y \in X \land Y \cap X = \varnothing)\,.$$

(viii) *Axioma del Conjunto Infinito.* Existe un conjunto que tiene infinitos elementos, es decir,

$$\exists Y\,(\varnothing \in Y \land \forall X \in Y, X_+ \in Y)\,,$$

donde $X_+ \equiv X \cup \{X\}$

(ix) *Axioma de Reemplazo.* Si $\varphi(x,y)$ es una función proposicional y A es un conjunto, entonces existe el conjunto de los elementos b que verifican $\varphi(a,b)$ para algún $a \in A$, es decir,

$$\forall X,\ \exists Y,\ \exists a \in X\,(b \in Y \iff \varphi(a,b))\,.$$

NB. Existe una teoría axiomática alternativa, la axiomática de *Bernays-Gödel-Von Neumann*, que está basada en la distinción de *clases* y *conjuntos*, pero aquí nos enfocamos solo en la axiomática de Zermelo-Fraenkel (que de ahora en adelante lo abreviaremos como ZF).

1.5. El Axioma de Elección

A los axiomas de Zermelo-Fraenkel, se les agregó el siguiente axioma.

Axioma de Elección*: Sea $A \neq \varnothing$ y $(X_a)_{a\in A}$ una familia de conjuntos no vacíos. Entonces existe una función $f : A \to \bigcup\limits_{a\in A} X_a$ tal que para cada $a \in A$, $f(a) \in X_a$.*

Observación 1.5.1 Lo anterior es equivalente a decir que si $A \neq \varnothing$ y $(X_a)_{a\in A}$ es una familia de conjuntos no vacíos, se tiene que $\prod\limits_{a\in A} X_a \neq \varnothing$. En otras palabras, el axioma de elección asegura que para cualquier colección de conjuntos, se puede elegir de forma simultánea un elemento de cada uno de ellos (de ahí viene su nombre).

Cabe mencionar que en el caso de familia infinita, la operación "simultánea elección" no es obvia y su legitimidad se puede cuestionar. El axioma de elección fue formulado en el año 1904 por *Ernst Zermelo* para formalizar su *principio de buen ordenamiento*, (véase subsección 1.5.1). A pesar de todas las discusiones y controversias que ocasionó este axioma, en el año 1938 *Kurt Gödel* demostró que si la teoría Zermelo-Fraenkel, en abreviación ZF, es consistente (problema que aún es abierto), entonces la teoría ZFC (es decir, ZF más el axioma de elección) también lo es. La demostración de Gödel, sin embargo, dejaba abierta la posibilidad de que el axioma de elección se podía derivar de los otros axiomas. Sin embargo, en el año 1963 *Paul Cohen* demostró que esto no es cierto, es decir, el *axioma de elección* es independiente de los demás axiomas y tanto el como su negación se pueden agregar a ZF sin tener problemas de inconsistencia. La teoría ZFC es la teoría que utilizamos por defecto en la matemática moderna.

Llegado a este punto, es menester mencionar un teorema muy importante dentro de la lógica matemática, el *Teorema de incompletitud de Gödel*. Dicho teorema establece que una teoría de primer orden[2] que contiene la aritmética de Peano (por ejemplo, la teoría de conjuntos), no puede ser consistente y completa a la vez. Es decir, si los axiomas de dicha teoría no se contradicen entre sí, entonces se pueden construir fórmulas a través de dichos axiomas que no pueden probarse ni refutarse.

Las discusiones que genera el axioma de elección, son debidas a que con el se hacen verdaderas algunas afirmaciones que al inicio pueden verse "contraintuitivas" como por ejemplo la famosa *Paradoja de Banach-Tarski* que asegura lo siguiente:

> *Cada bola B se puede descomponer en un número finito de partes $A_1, \ldots, A_k$ y a partir de ellas, mediante operaciones rígidas (desplazamientos y giros) se puede obtener*
>
> (1) *Una bola de radio dos veces mayor que la original.*
>
> (2) *Un número finito de bolas del mismo tamaño.*

NB. La paradoja de Banach-Tarski sirve también como ilustración de la existencia de *conjuntos no-medibles*. Aunque la teoría de la medida escapa de los contenidos de este texto, cabe mencionar otra paradoja del axioma de elección: el intervalo $[0, 1]$ se puede escribir como unión numerable de conjuntos disjuntos, que son traslaciones del mismo conjunto. Dichos conjuntos, por lo tanto, no pueden ser (Lebesgue) medibles.

1.5.1. Equivalentes formas del Axioma de Elección

En esta subsección, estableceremos tres versiones equivalentes del axioma de elección, que citamos a continuación:

- (Teorema de Zermelo / Principio de buen ordenamiento) *Todo conjunto admite un buen ordenamiento.*

- (Lema de Zorn) *Cada conjunto X ordenado, con la propiedad de que cada cadena tiene una cota superior (en X) tiene un elemento maximal.*

[2] es decir, los axiomas de la teoría se pueden formular en lenguaje de primer orden: los cuantificadores $\exists$ (existencial) y $\forall$ (universal) solo pueden operar en variables de base.

- (Principio de Hausdorff) *Cada conjunto parcialmente ordenado tiene una cadena maximal.*

Empezamos por demostrar la equivalencia entre los dos últimos.

Proposición 1.5.2 *El lema de Zorn es equivalente al principio de Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN (ZORN $\Rightarrow$ HAUSDORFF): . Supongamos primero la validez del Lema de Zorn y consideramos un conjunto $X \neq \varnothing$ parcialmente ordenado. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las cadenas en X, ordenado por la relación *inclusión de conjuntos*. Sea $\mathcal{C}$ una cadena cualquiera de $(\mathcal{F}, \subseteq)$ y sea $A = \bigcup_{Y \in \mathcal{C}} Y$. Veamos que A es una cadena de $(X, \leq)$. En efecto, para cada $x, y \in A$ existen conjuntos Y_1, Y_2 (cadenas de X) tales que $x \in Y_1$, $y \in Y_2$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena y $Y_1, Y_2 \in \mathcal{C}$ podemos suponer que $Y_1 \preceq Y_2$. Se deduce que $x, y \in Y_2$, y como este último conjunto es totalmente ordenado, podemos suponer que $x \leq_{Y_2} y$, y por lo tanto $x \leq_A y$. Esto muestra que A es una cadena de $(X, \leq)$, y por lo tanto un elemento de $\mathcal{F}$. Deducimos fácilmente que A es una cota superior de la cadena $\mathcal{C}$. Podemos entonces aplicar el Lema de Zorn y obtener una cadena $B \in (\mathcal{F}, \preceq)$ maximal para la inclusión, por lo que se deduce el principio de Hausdorff.

[Hausdorff $\Rightarrow$ Zorn]. Vamos a demostrar el recíproco. Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado con la propiedad que cada cadena tiene una cota superior (en X). Aplicando el Principio de Hausdorff, obtenemos una cadena maximal $\mathcal{C}$ y llamamos $\widehat{T} \in X$ una cota superior. Ahora, vamos a establecer que $\widehat{T}$ es un elemento maximal de X. En efecto, si existe $\tilde{T} \succeq \widehat{T}$ con $\tilde{T} \neq \widehat{T}$, entonces la cadena $\mathcal{C}$ se puede prolongar adicionando el elemento $\tilde{T}$ (que es comparable y superior a todos los elementos de la cadena), lo que contradice su maximalidad. $\square$

Para deducir el Lema de Zorn por el Axioma de Elección, necesitaremos introducir la noción de φ-*torre*.

DEFINICIÓN 1.5.3

(φ-torre) Sea X un conjunto, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia cualquiera de conjuntos y $\varphi : \mathcal{F} \to X$ una función. La familia $\mathcal{F}$ se dice una φ-*torre* si cumple las siguientes propiedades:

(i) $\varnothing \in \mathcal{F}$.

(ii) Si $\{A_i : i \in I\}$ es cualquier cadena en $(\mathcal{F}, \subseteq)$, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$.

(iii) Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A \cup \{\varphi(A)\} \in \mathcal{F}$.

Notemos que $\mathcal{P}(X)$ es trivialmente una φ-torre y que si $\{\mathcal{F}_i | \, i \in I\}$ es una familia cualquiera de φ-torres en $\mathcal{P}(X)$, entonces $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ es también una φ-torre. Con esta observación, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.5.4

(Sub-φ-torre mínima) Sea $\mathcal{F}$ una φ-torre. La intersección $\mathcal{M}$ de todas las sub-φ-torres de $\mathcal{F}$ se llama *sub-φ-torre mínima*.

Es obvio por su definición que la sub-φ-torre mínima $\mathcal{M}$ es única, contiene al menos dos elementos (el conjunto vacío $\varnothing$ y el conjunto $\{\varphi(\varnothing)\}$) y está contenida en cada φ-torre $\mathcal{F}$. Mostramos ahora que $\mathcal{M}$ es una cadena de $\mathcal{F}$. En lo que sigue, diremos que $M \in \mathcal{M}$ es un *elemento medio* si para cada $M' \in \mathcal{M}$ se tiene que $M' \subseteq M$ o bien $M \subseteq M'$, es decir, M es comparable con todos los elementos de $\mathcal{M}$.

Proposición 1.5.5 *Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una φ-torre de X. La sub-φ-torre mínima $\mathcal{M}$ es una cadena de $(\mathcal{F}, \subseteq)$.*

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que establecer que cada elemento de $\mathcal{M}$ es un elemento medio. Por eso necesitamos establecer primero lo siguiente:

Afirmación: Si M es un elemento medio de $\mathcal{M}$, entonces para cada $M' \in \mathcal{M}$, se tiene que $M' \subseteq M$ o bien $M \cup \{\varphi(M)\} \subseteq M'$.

Prueba de la afirmación. Definamos el conjunto

$$\mathcal{F}_M := \{M' \in \mathcal{M} : M' \subseteq M \text{ o bien } M \cup \{\varphi(M)\} \subseteq M'\}\ .$$

Observamos que $M \in \mathcal{F}_M \subseteq \mathcal{M}$. Mostraremos a continuación que $\mathcal{F}_M = \mathcal{M}$. Para eso, es suficiente establecer que $\mathcal{F}_M$ es una φ-torre. Las propiedades (i) y (ii) de la Definición 1.5.3 son inmediatas. Probamos ahora que $\mathcal{F}_M$ también cumple con la propiedad (iii). En efecto, sea $M' \in \mathcal{F}_M$, es decir, $M' \subseteq M$ o bien $M \cup \{\varphi(M)\} \subseteq M'$. En el segundo caso es obvio que $M' \cup \{\varphi(M')\} \in \mathcal{F}_M$ (ya que $M \cup \{\varphi(M)\} \subseteq M' \cup \{\varphi(M')\}$). Podemos entonces limitarnos al caso $M' \subseteq M$. Observamos entonces que $M' \cup \{\varphi(M')\} \in \mathcal{M}$ (ya que $M' \in \mathcal{F}_M \subseteq \mathcal{M}$ y $\mathcal{M}$ es una φ-torre), por lo tanto es comparable con el elemento medio M. Si $M' \cup \{\varphi(M')\} \subseteq M$, deducimos directamente que $M' \cup \{\varphi(M')\} \in \mathcal{F}_M$. Nos queda tratar el caso $M \subseteq M' \cup \{\varphi(M')\}$. Recordando que $M' \subseteq M$ se deduce que $M = M'$ o bien $M = M' \cup \{\varphi(M')\}$. En el segundo caso $M' \cup \{\varphi(M')\}$ es un elemento de $\mathcal{F}_M$ (ya que M lo es), mientras que en el primer caso se tiene $M \cup \{\varphi(M)\} = M' \cup \{\varphi(M')\}$ que implica $M' \cup \{\varphi(M')\} \in \mathcal{F}_M$ (por la definición de $\mathcal{F}_M$). $\diamondsuit$

Consideramos ahora el conjunto

$$\widehat{\mathcal{F}} := \{M \in M : M \text{ medio}\} \subseteq \mathcal{M}\,.$$

Se trata de mostrar que $\widehat{\mathcal{F}} = \mathcal{M}$, o de forma equivalente que $\widehat{\mathcal{F}}$ es una φ-torre. Igual que en el caso anterior, las propiedades (i) y (ii) son fáciles de comprobar. Mostramos la (iii). Sea $M \in \widehat{\mathcal{F}}$ y $M' \in \mathcal{M}$. Como M es medio (por definición del conjunto $\widehat{\mathcal{F}}$), se tiene (por la Afirmación) que $M' \subseteq M$ (por lo tanto $M' \subseteq M \cup \{\varphi(M)\}$) o bien $M \cup \{\varphi(M)\} \subseteq M'$. En ambos casos se deduce $M \cup \{\varphi(M)\} \in \widehat{\mathcal{F}}$ y la propiedad (iii) se cumple. □

Corolario 1.5.6 *Si $\mathcal{F}$ es una φ-torre, entonces existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi(A) \in A$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$ la sub-φ-torre mínima contenida en $\mathcal{F}$. Por la Proposición 1.5.5, $\mathcal{M}$ es una cadena en $\mathcal{F}$. Consideremos $A = \bigcup_{M\in\mathcal{M}} M$. Por la propiedad (ii) de la Definición 1.5.3 se deduce que $A \in \mathcal{M}$, y por la propiedad (iii) tenemos que $A \cup \{\varphi(A)\} \in \mathcal{M}$. Lo anterior implica que $A \cup \{\varphi(A)\} \subseteq A$ (ya que A es la unión de todos los elementos de $\mathcal{M}$) de donde concluimos el resultado buscado. □

Estamos ahora en posición de demostrar el principal teorema de esta sección.

TEOREMA 1.5.7

(Equivalencias del Axioma de Elección) Dentro de la teoría ZF, los enunciados siguientes son equivalentes:

(i) Axioma de elección.

(ii) Lema de Zorn.

(iii) Principio de Hausdorff.

(iv) Teorema de Zermelo (Principio de buen ordenamiento).

DEMOSTRACIÓN: La Proposición 1.5.2 establece la equivalencia (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii). Completaremos la demostración del teorema a través de las siguientes implicaciones:

(i)⇒(ii). Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ el conjunto de todas las cadenas de X (incluyendo la cadena vacía). Para cada $A \in \mathcal{F}$, tomamos a_A una cota superior (*c.f.* axioma de elección) y definamos el conjunto:

$$T_A = \{x \in X : (a_A \leq x) \And \neg\, (x \leq a_A)\}\,,$$

donde $\neg\,(x \leq a_A)$ es la negación de $x \leq a_A$. Para demostrar el Lema de Zorn, será suficiente establecer la existencia de una cadena $A \in \mathcal{F}$ para la cual $T_A = \varnothing$, pues en este caso a_A sería un elemento maximal en X. Supongamos que no existe tal cadena, es decir, para toda cadena A, se tiene que $T_A \neq \varnothing$. Entonces, utilizando nuevamente el axioma de elección, existe una función de elección

$$\varphi : \mathcal{F} \to \bigcup_{A \in \mathcal{F}} T_A,$$

tal que para cada $A \in \mathcal{F}$, $\varphi(A) \in T_A$. Veamos a continuación que $\mathcal{F}$ es una φ-torre. En efecto, observemos:

- $\varnothing \in \mathcal{F}$ por construcción.
- Sea $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{F}$ una cadena de $\mathcal{F}$. Notemos que $\bigcup_{i \in I} A_i$ es una cadena de $(X, \leq)$. En efecto, sean $a, b \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Entonces existen $i, j \in I$ tales que $a \in A_i$, $b \in A_j$. Como $\{A_i\}_{i \in I}$ es una cadena, uno de los conjuntos, digamos A_i, contiene al otro. Entonces, ambos elementos a, b pertenecen a A_i, por lo que están relacionados por el orden de alguna forma. Así se demuestra que $\bigcup_{i \in I} A_i$ es una $\leq$-cadena, es decir $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$.
- Sea $A \in \mathcal{F}$. Queremos ver que $A \cup \{\varphi(A)\} \in \mathcal{F}$. En efecto, notemos que

$$a \in A \implies a \leq a_A \leq \varphi(A).$$

Hemos demostrado así que $\mathcal{F}$ es una φ-torre.

Por el Corolario 1.5.6, existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \cup \{\varphi(A)\} \subseteq A$. Como a_A es una cota superior de A, tendremos que $\varphi(A) \leq a_A$, y además $\varphi(A) \in T_A$ (por la definición de φ). Ahora recordando la definición del conjunto T_A se tiene que $\neg(\varphi(A) \leq a_A)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, existe A tal que $T_A = \varnothing$ para el cual a_A es maximal en X.

(ii)$\Rightarrow$(iv). Sea X un conjunto no vacío. Consideramos el conjunto $\mathcal{W}$ de todas las relaciones de buen orden en subconjuntos de X, es decir, $\mathcal{R} \in \mathcal{W}$ si existe $E \subseteq X$, tal que $\mathcal{R} \subseteq E \times E$ y $(E, \mathcal{R})$ es un conjunto bien ordenado. En lo que sigue, utilizaremos el símbolo $\leq_E$ para la relación $\mathcal{R}$ sobre E y denotemos los elementos de $\mathcal{W}$ por $(E, \leq_E)$. Definamos un orden parcial $\preceq$ sobre $\mathcal{W}$

$$(E_1, \leq_{E_1}) \preceq (E_2, \leq_{E_2}) \quad \iff \quad \begin{cases} E_1 \subseteq E_2 \\ \leq_{E_2} \text{ es una extensión del orden } \leq_{E_1} \\ \forall x \in E_1, \forall y \in E_2 \setminus E_1 \text{ tal que } x \leq_{E_2} y\,. \end{cases} \tag{1.6}$$

Se puede comprobar fácilmente que $\preceq$ es una relación de orden en $\mathcal{W}$. Sea $(E_i, \leq_{E_i})_{i\in I}$ una cadena arbitraria de $\mathcal{W}$ y $E = \bigcup_{i\in I} E_i$. Definamos un orden $\leq_E$ en E como sigue: si $x, y \in E$, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $x, y \in E_{i_0}$ y afirmamos

$$x \leq_E y \iff x \leq_{E_{i_0}} y.$$

Es inmediato que la relación de orden $\leq_E$ está bien definida. Mostramos a continuación que el conjunto $(E, \leq_E)$ está bien ordenado: En efecto, sea $A \subseteq E$ no vacío y $x \in A$ con $i_0 \in I$ tal que $x \in I_{i_0}$. Entonces $A \cap E_{i_0}$ tiene mínimo en E_{i_0} (por ser E_{i_0} bien ordenado). Este elemento es también mínimo de A por la tercera propiedad que pedimos en la definición de orden (véase (1.6)). Se deduce que $(E, \leq_E)$ es una cota superior de la cadena $(E_i, \leq_{E_i})_{i\in I}$. Aplicando el Lema de Zorn, se obtiene un elemento maximal $(\widehat{E}, \leq_{\widehat{E}}) \in \mathcal{W}$. Observemos que $\widehat{E} = X$. En efecto, si existe $x_0 \in X \setminus \widehat{E}$, entonces se puede extender el buen orden de $\widehat{E}$ al conjunto $\widetilde{E} := \widehat{E} \cup \{x_0\}$ afirmando que $x_0 > x$ para cada $x \in \widehat{E}$, lo que contradice la maximalidad de $(\widehat{E}, \leq_{\widehat{E}})$.

(iv)⇒(i). Sea $\{X_a\}_{a\in A}$ una familia cualquiera de conjuntos no vacíos. Consideramos un buen orden en el conjunto $\bigcup_{a\in A} X_a$ (*c.f.* Teorema de Zermelo). Se puede entonces definir la función

$$\begin{cases} f : A \to \bigcup_{a\in A} X_a \\ f(B) = \min X_B \end{cases}$$

Hemos demostrado así que $\prod_{a\in A} X_a \neq \varnothing$. $\square$

Es importante notar que el axioma de elección, igual que sus versiones equivalentes, solo aseguran la existencia de objetos, pero no proporcionan ninguna construcción explícita de ellos. Por ejemplo, no se sabe (ni se puede saber) como es un buen orden en $\mathbb{R}$.

1.5.2. Aplicaciones del Axioma de Elección

En esta sección veremos algunas aplicaciones interesantes del axioma de elección.

I. Existencia de base algebraica

Recordatorio: Sea E un espacio vectorial, $\Gamma \subseteq E$ se dice *linealmente independiente*, si para cada $\{f_i\}_{i\in F} \subseteq \Gamma$ finito y para cada $\{\lambda_i\}_{i\in F} \subseteq \mathbb{R}$ se tiene

$$\sum_{i\in F} \lambda_i f_i = 0 \implies \lambda_i = 0 \text{ para todo } i \in F.$$

Un espacio vectorial, se dice de dimensión infinita, si para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto con n-elementos en E que es linealmente independiente. Así E es de dimensión finita, si no es de dimensión infinita, es decir, existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada conjunto $\{f_1, \dots, f_{n+1}\} \subseteq E$, existen $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}\} \in \mathbb{R}$ no todos cero, tales que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_i = 0$. En este caso, el mínimo $n_0 \in \mathbb{N}$ con esta propiedad es la dimensión de E.

Un conjunto $B \subseteq E$ se dice *base algebraica* (o *base de Hamel*) del espacio vectorial E si:

(i) B es linealmente independiente (es decir, cada subconjunto finito de B es linealmente independiente).

(ii) $\langle B \rangle = E$, es decir, para todo $x \in E$ existen subconjuntos finitos $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq B$ y $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}$ de forma que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \,.$$

Se puede observar, como consecuencia de (i), que los conjuntos $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq B$ y $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}$ asociados a x son únicos.

Proposición 1.5.8 (Existencia de base de Hamel) *Todo espacio vectorial tiene una base de Hamel.*

DEMOSTRACIÓN: Sea E un espacio vectorial y sea $\mathcal{X}$ el conjunto de subconjuntos B de E que son linealmente independientes. El conjunto $\mathcal{X}$ se considera ordenado por la inclusión. Sea $(B_i)_{i \in I}$ una cadena dentro de $\mathcal{X}$ y definamos $D = \bigcup_{i \in I} B_i$. Mostramos que D es linealmente independiente: sea $F \subseteq D$ finito. Entonces existe $i_0 \in I$ tal que $F \subseteq B_{i_0}$. Como B_{i_0} es linealmente independiente, se deduce que F lo es, y por lo tanto $D \in (B_i)_{i \in I}$. Al aplicar el Lema de Zorn, se obtiene un elemento maximal $\overline{B} \in \mathcal{X}$. Se deduce fácilmente que $\langle \overline{B} \rangle = E$, pues si $\overline{x} \in E \setminus \langle B \rangle$ entonces $\widehat{B} = \overline{B} \cup \{x\} \in \mathcal{X}$, contradiciendo la maximalidad de $\overline{B}$. $\square$

Aprovechamos para mencionar una consecuencia altamente contraintuitiva del Teorema 1.5.8.

Corolario 1.5.9 *Existen dos funciones periódicas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la propiedad*

$$f(x) + g(x) = x \text{ para cada } x \in \mathbb{R}.$$

DEMOSTRACIÓN: Vemos $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre el cuerpo de los racionales $\mathbb{Q}$ y consideramos una base de Hamel (necesariamente infinita) $(e_i)_{i \in I}$. Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$, existe un único conjunto finito $J \subseteq I$ y $(\lambda_j)_{j\in J} \subseteq \mathbb{R}$ tales que

$$x = \sum_{j\in J} \lambda_j \, e_j.$$

Fijamos un $i_0 \in I$ (arbitrario) y definimos las funciones

$$f\,(x) = \lambda_{i_0}\, e_{i_0} \quad \text{y} \quad g\,(x) = \sum_{j\in J\setminus\{i_0\}} \lambda_j \, e_j, \;\text{ con } x \in X.$$

Se comprueba fácilmente que f es e_i-periódica (siempre que $i \neq i_0$) y g es e_{i_0}-periódica. □

II. Existencia de ultrafiltros no triviales (Boolean Prime Ideal Theorem)

Comenzaremos con la siguiente definición.

Definición 1.5.10

(Filtro) Sea $\Omega \neq \varnothing$. Una familia $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ se dice un *filtro* sobre Ω si:

(i). $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

(ii). para todo $A, B \in \mathcal{F}$: $\quad A \cap B \in \mathcal{F}$.

(iii). para todo $A \in \mathcal{F}$ y $C \in 2^{\Omega}$: $\quad A \subseteq C \implies C \in \mathcal{F}$.

Ejemplo 1.5.11 (i). La familia con un solo elemento $\mathcal{F} = \{\Omega\}$ es un filtro. Este filtro es el elemento mínimo del conjunto de todos los filtros (ordenado por inclusion).
(ii). Sea $A \subseteq \Omega$ no vacío. Entonces

$$\mathcal{F}_A := \{B \in 2^{\Omega} : \; A \subseteq B\}$$

es un filtro (es el filtro generado por el conjunto A).

La siguiente definición será muy importante en los capítulos siguientes.

Definición 1.5.12

(Propiedad de intersección finita - PIF) Sea $X \neq \varnothing$. Decimos que una familia de conjuntos $\mathcal{F}$ de X tiene la *propiedad de intersección finita* (en adelante, *PIF*) si cualquier subfamilia finita de ésta tiene intersección no vacía, es decir, para cada

$n \in \mathbb{N}$, y para cada $\{F_1, \ldots, F_n\} \in \mathcal{F}$ se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \varnothing.$$

Observación 1.5.13 Se deduce fácilmente de la propiedad (ii) de la Definición 1.5.10 que todo filtro tiene la PIF.

Proposición 1.5.14 (Filtro generado por una familia con PIF) *Sea $X \neq \varnothing$ y sea $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia que tiene la PIF. Entonces existe un filtro $\mathcal{F}$ sobre X con $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, y determinado por $\mathcal{G}$. Este filtro se denota por $\langle \mathcal{G} \rangle$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideramos el conjunto

$$\mathcal{F} = \left\{ F \subseteq X : \exists n \in \mathbb{N}, \exists \{G_1, \ldots, G_n\} \in G \text{ con } \bigcap_{i=1}^{n} G_i \subseteq F \right\}.$$

Mostramos que $\mathcal{F}$ es un filtro, es decir, cumple las propiedades (i), (ii) y (iii) de la Definición 1.5.10.

(i) $\varnothing \notin \mathcal{F}$ (porque G tiene la PIF).

(ii) Si $F, F' \in \mathcal{F}$, entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$, y $G_1, \ldots, G_n, H_1, \ldots, H_m \in G$ tal que $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \subseteq F$, $\bigcap_{i=1}^{m} H_i \subseteq F'$. Luego

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} G_i\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) \subseteq F \cap F',$$

por lo tanto $F \cap F' \in \mathcal{F}$.

(iii) Si $F \in \mathcal{F}$ y $A \supseteq F$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$, y existen $G_1, \ldots, G_n \in G$ tal que $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \subseteq F \subseteq A$, luego $A \in \mathcal{F}$.

Hemos demostrado así que $\mathcal{F}$ es un filtro. $\square$

Definición 1.5.15

(Ultrafiltro) Un filtro $\mathcal{F}$ (sobre Ω) se dice *ultrafiltro* (o a veces *hiperfiltro*), si para cada filtro $\mathcal{F}'$ sobre Ω se tiene que

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}' \implies \mathcal{F} = \mathcal{F}'.$$

En otras palabras, los ultrafiltros de Ω son los elementos maximales del conjunto de todos los filtros de Ω (parcialmente ordenado por la inclusión).

Ejemplo 1.5.16 Sea $\omega \in \Omega$. Es fácil ver que el filtro $\mathcal{F}_{\{\omega\}}$ generado por $\{\omega\}$ es un ultrafiltro que con un pequeño abuso de notación, lo denotaremos $\langle\omega\rangle$ (en lugar de $\langle\{\omega\}\rangle$). Los ultrafiltros que se obtienen de esta manera se llaman *ultrafiltros triviales*. En este sentido, cada elemento de un conjunto no vacío se puede identificar con el ultrafiltro que genera.

En un conjunto finito, los únicos ultrafiltros que existen son los ultrafiltros triviales. A continuación veremos como consecuencia del Lema de Zorn, que si Ω es un conjunto infinito, entonces existen ultrafiltros no triviales (es decir, que no son de la forma de Ejemplo 1.5.16). La siguiente proposición caracteriza de mejor manera los ultrafiltros.

Proposición 1.5.17 (Caracterización de ultrafiltros) *Sea $\mathcal{F}$ un filtro de X. Los enunciados siguientes son equivalentes:*

(i) Para cada $A \subseteq X$, se tiene que

$$A \in \mathcal{F} \ \text{ o bien } X \setminus A \in \mathcal{F}.$$

(ii) $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro.

DEMOSTRACIÓN: [(i) $\Rightarrow$ (ii)] Si $\mathcal{F}$ no es maximal, entonces existe $\mathcal{F}'$ filtro, tal que $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}'$. Sea $A \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$, por (i), como $A \notin \mathcal{F}$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{F}$ por lo que $X \setminus A \in \mathcal{F}'$, lo que es una contradicción.

[(ii) $\Rightarrow$ (i)] Supongamos que existe un conjunto $A \subseteq X$ tal que $A \notin \mathcal{F}$ y $X \setminus A \notin \mathcal{F}$. Sea $G = \mathcal{F} \cup \{A\}$. Veamos que G tiene la PIF. Supongamos que G no tiene la PIF, es decir, existen $G_1, \ldots, G_{n+1} \in G$ tal que $\bigcap_{i=1}^{n+1} G_i = \varnothing$. Podemos suponer (sin pérdida de generalidad) que $G_{n+1} = A$, es decir

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} G_i\right) \cap A = \varnothing.$$

Se deduce que

$$\bigcap_{i=1}^{n} G_i \subseteq X \setminus A$$

de donde se concluye que $X \setminus A \in \mathcal{F}$, lo que es una contradicción. Esto muestra que la familia G tiene la PIF. Notamos por $\langle G \rangle$ el filtro generado por G. Por la Proposición 1.5.14, tenemos que existe $\mathcal{F}' \supseteq \langle G \rangle \supsetneqq \mathcal{F}$, lo cual contradice la maximalidad de $\mathcal{F}$. □

Ejemplo 1.5.18 (i). Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre Ω y supongamos que $\mathcal{F}$ contiene un conjunto finito $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq \Omega$. Es fácil ver que $\mathcal{F}$ se puede extender a un ultrafiltro trivial (generado por un elemento de A).
(ii). Sea $\Gamma = \{A \subseteq \mathbb{N} : (\mathbb{N} \setminus A) \text{ finito}\}$. Es fácil ver que Γ es un filtro (*el filtro de los conjuntos co-finitos*), pero no es un ultrafiltro. En efecto, el conjunto $P = \{m \in \mathbb{N} : m \text{ es par}\}$ es infinito y tiene complemento infinito, por lo tanto $\mathbb{N} \setminus P \notin \Gamma$ y $P \notin \Gamma$. Se deduce por la Proposición 1.5.17 que Γ no es un ultrafiltro. Además, si p es un ultrafiltro que contiene Γ, entonces p no puede ser un ultrafiltro trivial.

El siguiente resultado, consecuencia del axioma de elección, garantiza que cada filtro se puede extender a un ultrafiltro, y por lo tanto existen ultrafiltros no triviales (*c.f.* Ejemplo 1.5.18(ii)).

Proposición 1.5.19 (Boolean prime ideal axiom - BPI) *Todo filtro puede ser extendido a un ultrafiltro.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{F}$ un filtro, y $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{F}' \text{es un filtro, y} \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'\}$ equipado con el orden de inclusión. Vamos a demostrar que $(\mathfrak{F}, \subseteq)$ cumple las hipótesis del Lema de Zorn. Sea $\mathcal{C}$ una cadena en $(\mathfrak{F}, \subseteq)$, y $F = \bigcup_{\mathcal{F}' \in \mathcal{C}} \mathcal{F}'$. Veremos que F es un filtro.

- $\varnothing \notin F$, ya que para cada $\mathcal{F}' \in \mathcal{C}$ se tiene que $\varnothing \notin \mathcal{F}'$.

- Sean $A, B \in F$, luego $A \in \mathcal{F}_1$, $B \in \mathcal{F}_2$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena, entonces podemos suponer que $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ y $A, B \in \mathcal{F}_2$. Luego como $\mathcal{F}_2$ es un filtro, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}_2$ de donde concluimos que $A \cap B \in F$.

- Sea $A \in F$, y $B \supseteq A$. Tenemos que existe $\mathcal{F}' \in \mathcal{C}$ tal que $A \in \mathcal{F}'$, por lo que

$B \in \mathcal{F}'$ de donde concluimos que $B \in F$.

Se tiene entonces que F es un filtro. Por el Lema de Zorn, $(\mathfrak{F}, \subseteq)$ tiene un elemento maximal $\mathcal{F}'$, es decir, $\mathcal{F}'$ es un ultrafiltro. □

Ejemplo 1.5.20 (Ultrafiltros de $\mathbb{N}$) Los ultrafiltros de $\mathbb{N}$ son:

(i) Los ultrafiltros triviales $\langle n \rangle \equiv n$, $n \in \mathbb{N}$;

(ii) Los ultrafiltros que extienden el filtro de co-finitos.

Observación 1.5.21 Hemos visto que “lema de Zorn $\implies$ BPI”. Mencionamos, sin demostrarlo, que el recíproco no es cierto, es decir, el BPI es estrictamente más débil que el Axioma de Elección. Sin embargo, el BPI tampoco se puede deducir de la teoría ZF.

1.6. Aritmética de Cardinales

En esta sección definiremos el concepto de *cardinal* de un conjunto. Cuando un conjunto es finito, parece intuitivo definir el cardinal de este conjunto, como la cantidad de elementos que tiene. El problema surge cuando se trata de conjuntos infinitos, por ejemplo los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$. ¿Cómo distinguir entonces entre los diferentes *tipos de infinito*? Los siguientes resultados nos ayudarán a definir el concepto de cardinal para un conjunto cualquiera.

Proposición 1.6.1 *Sean X, $Y \neq \varnothing$. Las siguientes propiedades son equivalentes.*

(i) Existe una inyección $f : X \hookrightarrow Y$.

(ii) Existe una sobreyección $g : Y \twoheadrightarrow X$.

DEMOSTRACIÓN: (i) $\Rightarrow$ (ii). Primero, observamos que f es una biyección entre X y su imagen $f(X)$. Fijando $x_0 \in X$ (elemento arbitrario), definimos la sobreyección $g : Y \mapsto X$ como sigue:

$$g(x) = \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{si} \quad y \in f(X) \\ x_0 & \text{si} \quad y \notin f(X). \end{cases}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sea $g : Y \to X$. Para cada $x \in X$, se define $A_x = g^{-1}(x) \subseteq Y$. Así $(A_x)_{x \in X}$

es una partición de Y. Por el axioma de elección, existe una función

$$f : X \to \bigcup_{x \in X} A_x = Y$$

tal que $f(x) \in A_x = g^{-1}(x)$. Concluimos fácilmente que f es una inyección. $\square$

Observación 1.6.2 Notemos que la implicación (ii)⇒(i) se demuestra aquí mediante el axioma de elección.

A veces puede ser difícil establecer de manera inmediata una biyección entre dos conjuntos. El siguiente teorema resuelve de cierta manera la disyuntiva de encontrar biyecciones.

Teorema 1.6.3

(Schröder-Bernstein) Sean $X, Y \neq \varnothing$. Si existen inyecciones

$$f : X \hookrightarrow Y \quad \& \quad g : Y \hookrightarrow X,$$

entonces existe una biyección $h : X \mapsto Y$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $y_0 \in Y$. Si $f^{-1}(y_0)$ existe, definimos $x_0 = f^{-1}(y_0)$. De lo contrario, decimos que $y_0 \in Y_Y$. Si ahora $g^{-1}(x_0)$ existe, definimos $y_1 = g^{-1}(x_0)$, sino, decimos que $y_0 \in Y_X$. Si continuamos este proceso tanto como sea posible, entonces una de estas tres situaciones debe ocurrir:

(i) Alcanzamos algún $x_n \in X \setminus g(Y)$. Nos detuvimos porque ya no hay un elemento $y \in Y$ con $g(y) = x_n$ (esto puede ocurrir ya que g no necesariamente es sobreyectiva).

(ii) Alcanzamos algún $y_n \in Y \setminus f(X)$. Nos detuvimos debido a que no existe algún $x \in X$ con $f(x) = y_n$ (esto puede ocurrir porque f tampoco es necesariamente sobreyectiva).

(iii) Este proceso continua por siempre, generando sucesiones

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq g(Y), \ \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq f(X), \ \text{ con } \begin{cases} y_n & = f(x_n) \\ x_n & = g(y_{n+1}) \end{cases} \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N}.$$

Para cada $y \in Y$ tenemos un proceso bien definido que puede tornarse en uno de estos tres caminos, y así podemos particionar el conjunto Y en tres subconjuntos mutuamente disjuntos. Definamos

$$\begin{aligned} Y_X &= \{y \in Y : \text{ proceso termina con } x_n \in X \setminus g(Y)\}, \\ Y_Y &= \{y \in Y : \text{ proceso termina con } y_n \in Y \setminus f(X)\}, \\ Y_\infty &= \{y \in Y : \text{ proceso no termina}\}. \end{aligned}$$

El mismo proceso puede ser aplicado empezando con elementos de X, que puede ser particionado en tres conjuntos disjuntos. Definamos

$$\begin{aligned} X_X &= \{x \in X : \text{ proceso termina con } x_n \in X \setminus g(Y)\}, \\ X_Y &= \{x \in X : \text{ proceso termina con } y_n \in Y \setminus f(X)\}, \\ X_\infty &= \{x \in X : \text{ proceso no termina}\}. \end{aligned}$$

Notemos que la restricción de f a X_X es una biyección de X_X a Y_X. Para probar esto se verifica fácilmente que

- Si $x \in X_X$, entonces $f(x) \in Y_X$.
- Para cada $y' \in Y_X$, existe un elemento $x' \in X_X$ con $f(x') = y'$. Este elemento es único, ya que f es una inyección.

Por el mismo argumento, vemos que $g : Y_Y \mapsto X_Y$ es una biyección, y por lo tanto $g^{-1} : X_Y \mapsto Y_Y$ también lo es. Finalmente es fácil ver que $f : X_\infty \mapsto Y_\infty$ también es una biyección. Definamos la función $h : X \to Y$ como

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in X_\infty \cup X_X \\ g^{-1}(x) & \text{si} \quad x \in X_Y, \end{cases}$$

que es una biyección entre los conjuntos X e Y. $\square$

El siguiente resultado, que se demuestra aquí mediante el axioma de elección, es muy importante para lo que sigue a continuación.

Teorema 1.6.4

(Dicotomía) Sean $X, Y \neq \varnothing$. Entonces al menos una de las siguientes alternativas es cierta:

(i). Existe una inyección de X en Y.

(ii). Existe una sobreyección de X en Y.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las inyecciones $f : A \hookrightarrow Y$ donde $A \subseteq X$. Identificando cada inyección f (elemento de $\mathcal{F}$) con su grafo $\mathrm{Graph}\,(f)$, podemos ordenar este conjunto mediante la inclusión, es decir

$$f \preceq g \iff \mathrm{Graph}\,(f) \subseteq \mathrm{Graph}\,(g). \tag{1.7}$$

Es fácil ver que en el caso $f : A \hookrightarrow Y$ y $g : B \hookrightarrow Y$, se tiene que

$$f \preceq g \qquad \iff \qquad \begin{cases} A & \subseteq B \\ g|_A & = f. \end{cases}$$

Sea $(f_i)_{i\in I}$ una cadena en $\mathcal{F}$ y sea $\Gamma = \bigcup_{i\in I} \mathrm{Graph}\,(f_i)$. Mostremos que Γ es el grafo de una función f inyectiva (definida sobre $\bigcup_{i\in I} A_i$, si $f_i : A_i \hookrightarrow Y$). Para eso, es suficiente mostrar que para cada (x, y), $(x', y') \in \Gamma$ se tiene que

$$x \neq x' \quad \text{si y sólo si} \quad y \neq y'. \tag{1.8}$$

En efecto, existen $i, j \in I$ tal que $(x, y) \in \mathrm{Graph}\,(f_i)$ y $(x', y') \in \mathrm{Graph}\,(f_j)$. Como $(f_i)_{i\in I}$ es una cadena, se puede suponer que $f_i \preceq f_j$ por lo tanto (x, y), $(x', y') \in \mathrm{Graph}\,(f_j)$. Dado que f_j es una inyección, se concluye que (1.8) es cierta. Por lo tanto $\Gamma = \mathrm{Graph}\,(f)$ con f inyectiva, y se deduce directamente que f es una cota superior de la cadena $(f_i)_{i\in I}$.

Aplicando el lema de Zorn, obtenemos un elemento maximal $\widehat{f} \in \mathcal{F}$, con $\widehat{f} : A \hookrightarrow Y$, $(A \subseteq X)$. Si $A \neq X$ y $\widehat{f}(A) \neq Y$, entonces existen elementos $x_0 \in X \setminus A$ e $y_0 \in Y \setminus \widehat{f}(A)$ que permiten extender $\widehat{f}$ a la siguiente inyección

$$\widetilde{f} : A \cup \{x_0\} \to (\widehat{f}(A) \cup \{y_0\}),$$

con

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ y_0 & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Es obvio que $\widetilde{f}$ es una extensión estricta de $\widehat{f}$, lo que contradice la maximalidad de ésta última. Se concluye entonces que $A = X$ (y en este caso $\widehat{f} : X \hookrightarrow Y$ es una inyección de X a Y), o $B = Y$ (en cuyo caso $\widehat{f}^{-1} : Y \hookrightarrow X$ es una inyección de Y a X). $\square$

Ya estamos en condiciones de definir formalmente lo que es un conjunto finito.

Definición 1.6.5

(Conjunto finito) Un conjunto $F \neq \varnothing$ se dice *finito*, si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y una biyección $\varphi : F \mapsto \mathbb{N}_{n_0} := \{1, \dots n_0\}$.

Un conjunto que no cumple la Definición 1.6.5 se dice *infinito*. El siguiente resultado caracteriza los conjuntos infinitos.

Proposición 1.6.6 (Caracterización de conjuntos infinitos) *Sea X un conjunto no vacío. Los enunciados siguientes son equivalentes.*

(i) *No existe una biyección entre X y $\mathbb{N}_n := \{1, \dots, n\}$ para ningún $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *Existe una inyección $f : \mathbb{N} \hookrightarrow X$.*

(iii) *Existe una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que no tiene elemento minimal con el orden que define la inclusión de conjuntos.*

(iv) *Existe una inyección $g : X \hookrightarrow X \setminus \{\bar{x}\}$ con $\bar{x} \in X$.*

DEMOSTRACIÓN: Mostraremos la proposición mediante las siguientes implicanciones: (i)⇒(ii). Sea $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el Teorema 1.6.4 (Dicotomía) podemos deducir que existe una inyección $f_n : \mathbb{N}_n \hookrightarrow X$. (En efecto, la opción alternativa queda excluida por la hipótesis, porque implicaría que X estaría en biyección con $\mathbb{N}_k$ para algún $k \leq n$.) Utilizando el axioma de elección, elegimos para cada $n \in \mathbb{N}$ una inyección f_n de $\mathbb{N}_n$ a X y definimos de forma recursiva una función $f : \mathbb{N} \to X$ como sigue:

$$\begin{cases} f(1) & = f_1(1) \\ \quad \vdots & \qquad \vdots \\ f(n+1) & = f_{n+1}(k) \text{ con } k = \min\{j \in \mathbb{N}_{n+1} : \, f_{n+1}(j) \notin f(\mathbb{N}_n)\}. \end{cases} \tag{1.9}$$

Mostramos que f es una inyección. Sea $A := \{n \in \mathbb{N} : \, \mathrm{card}(f(\mathbb{N}_n)) = n\}$, es decir, $n \in A$ si y sólo si la restricción de f en $\mathbb{N}_n$ es una inyección. Se deduce fácilmente por (1.9) que $1 \in A$ y $[\, n \in A \Rightarrow n+1 \in A \,]$, por lo tanto A es inductivo y $A = \mathbb{N}$. Se concluye fácilmente que f, definida por (1.9) es una inyección.

(ii)⇒(iii). Sea $f : \mathbb{N} \hookrightarrow X$ una inyección y $\widehat{A} = \{[n, \infty) \cap \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$. Definamos $\mathcal{A} = \{f(A) : A \in \widehat{A}\}$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f([n, \infty)) \supsetneq f([n+1, \infty))$. Por lo que $\mathcal{A}$ no tiene elemento minimal para la inclusión.

(iii)⇒(ii). Sea $A_1 \in \mathcal{A}$. Como A_1 no es minimal para la inclusión, existe $A_2 \in \mathcal{A}$ con $A_1 \supsetneq A_2$. De manera inductiva, se define una sucesión $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos de $\mathcal{A}$ tal que $A_n \supsetneq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Observamos que para cualquier $n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$ tenemos

$$(A_n \setminus A_{n+1}) \cap (A_m \setminus A_{m+1}) = \varnothing\,.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, elegimos un elemento $x_n \in A_n \setminus A_{n+1}$ (*c.f.* axioma de elección). Se concluye que la función

$$\begin{cases} f : \mathbb{N} & \hookrightarrow X \\ \quad n & \mapsto f(n) = x_n, \end{cases}$$

es una inyección.
(ii)$\Rightarrow$ (iv). Sea $f : \mathbb{N} \hookrightarrow X$ una inyección y $\bar{x} = f(0)$. Definamos la función

$$g(x) = \begin{cases} f(n+1) & \text{si} \quad x = f(n) \\ \quad x & \text{si} \quad x \notin f(\mathbb{N}) \end{cases}$$

Se deduce fácilmente que g es una inyección de X a $X \setminus \{\bar{x}\}$.

(iv)$\Rightarrow$(i). Es fácil ver que el conjunto finito $\mathbb{N}_n := \{1, \ldots, n\}$ no verifica la propiedad (iv). Entonces, si existiera una biyección $h : X \mapsto \mathbb{N}_n$, tendríamos que

$$h \circ g \circ h^{-1} : \mathbb{N}_n \hookrightarrow \mathbb{N}_n \setminus \{h(\bar{x})\}$$

sería una inyección entre $\mathbb{N}_n$ y un subconjunto propio de $\mathbb{N}_n$ de $(n-1)$ elementos, lo que es una contradicción. $\square$

La existencia de una biyección entre dos conjuntos X y Y nos permite identificar sus elementos, y por lo tanto sus subconjuntos, las funciones sobre ellos, etc. Es fácil ver que esta relación cumple las propiedades (i)–(iii) de la Definición 1.2.1, por lo tanto sería una relación de equivalencia en el *conjunto* de todos los conjuntos, si este último existiera. A pesar de este problema, vamos a declarar que dos conjuntos que se encuentren en biyección son *equivalentes* y vamos a proceder a definir los *cardinales* como clases de equivalencia de esta relación. Es obvio que el *conjunto* de los cardinales (conjunto de clases de equivalencia del *conjunto* de todos los conjuntos) tampoco existe[3].

Definición 1.6.7

(Cardinal – definición informal) Sea X un conjunto. Se define el *cardinal de* X ($\mathrm{card}(X)$) como la clase de equivalencia de todos los conjuntos que se pueden poner en biyección con X. El símbolo $\mathrm{card}(X)$ (que a veces denotamos por $|A|$) se

[3] Sin embargo, siempre que fijemos un universo $\mathcal{U}$ y consideremos conjuntos dentro este universo, todo se define correctamente.

lee también “cardinalidad de A”.

Conforme con la definición anterior, cada conjunto finito con n elementos, está en la clase de equivalencia de $\mathbb{N}_n$, y dicha clase se representa por el número natural n, es decir $\operatorname{card}(F) = n$. El cardinal de un conjunto finito está identificado por el número natural que corresponde a la cardinalidad del conjunto. (La cardinalidad del conjunto vacío es cero.)

La siguiente definición dará sentido a la comparación entre $\operatorname{card}(A)$ y $\operatorname{card}(B)$ incluso para conjuntos infinitos.

Definición 1.6.8

(Orden en los cardinales) Sean $X, Y \neq \varnothing$. Decimos que:

(I). $\operatorname{card}(X) \leq \operatorname{card}(Y) \iff \exists f : X \hookrightarrow Y$ (inyección).

(II). $\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y) \iff \exists f : X \rightarrowtail Y$ (biyección).

(III). $\operatorname{card}(X) \geq \operatorname{card}(Y) \iff \exists f : X \twoheadrightarrow Y$ (sobreyección).

La Proposición 1.6.1 y el Teorema 1.6.3 aseguran la compatibilidad de la Definición 1.6.8 que proporciona un orden al “conjunto” de los cardinales. El Teorema 1.6.4 (Dicotomía) asegura que es un orden total. Veremos más adelante que la relación de orden definida por (I) es un buen ordenamiento en el *conjunto* de ordinales.

Definición 1.6.9

Decimos que $\operatorname{card}(X) < \operatorname{card}(Y)$ si existe una inyección $f : X \hookrightarrow Y$ y no existe ninguna inyección de Y a X (de forma equivalente, no existe biyección entre X e Y).

Denotaremos por $\aleph_0$ al cardinal de $\mathbb{N}$. Se tiene que:

$$\operatorname{card}(\mathbb{N}) := \aleph_0 > n := \operatorname{card}(\mathbb{N}_n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Definición 1.6.10

(Conjunto numerable) Un conjunto A se dice *numerable* si existe una inyección $A \hookrightarrow \mathbb{N}$, o de forma equivalente, si

$$\operatorname{card}(A) \leq \aleph_0.$$

Si A es *numerable infinito*, entonces la Proposición 1.6.6 (caracterización de conjuntos infinitos) y el Teorema 1.6.3 (Teorema Schröder-Bernstein) aseguran que hay una biyección entre A y $\mathbb{N}$, por lo tanto

$$\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0.$$

Es fácil ver que los conjuntos $2\mathbb{N}$ (números pares) y $2\mathbb{N}+1$ (números impares), a pesar de ser subconjuntos estrictos de $\mathbb{N}$, tienen la misma cardinalidad que $\mathbb{N}$, es decir $\aleph_0$. En efecto, la función $n \rightarrowtail 2n$ (resp. $n \rightarrowtail 2n+1$), $n \in \mathbb{N}$, es una biyección entre $\mathbb{N}$ y $2\mathbb{N}$ (resp. entre $\mathbb{N}$ y $2\mathbb{N}+1$). Luego, para cada $k \in \mathbb{N}$, la función $n \rightarrowtail n+k$ define una biyección entre $\mathbb{N}$ y el conjunto $\mathbb{N} \setminus I_k := \{n \in \mathbb{N} : \ n \geq k\}$, por lo tanto

$$\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \mathrm{card}(2\mathbb{N}) = \mathrm{card}(2\mathbb{N}+1) = \mathrm{card}(\mathbb{N} \setminus I_k) = \aleph_0.$$

Si F es un conjunto finito, entonces $\mathrm{card}(\mathbb{N} \cupdot F) = \mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$. Por último, colocando en biyección el conjunto $2\mathbb{N}$ con $\mathbb{N} \cup \{0\}$ y el conjunto $2\mathbb{N}+1$ con $-\mathbb{N}$ (enteros negativos), obtenemos una biyección entre $\mathbb{Z}$ y $2\mathbb{N} \cupdot (2\mathbb{N}+1) := \mathbb{N}$, por lo tanto $\mathrm{card}(\mathbb{Z}) = \aleph_0$.

A continuación veremos más ejemplos importantes de conjuntos numerables:

Ejemplo 1.6.11 (i). Para cada $k \in \mathbb{N}$, los conjuntos $\mathbb{N}^k$ y $\mathbb{Z}^k$ son numerables.

DEMOSTRACIÓN: Observemos que $\mathrm{card}(\mathbb{N}^2) = \aleph_0$. En efecto, los elementos de $\mathbb{N}^2$ se pueden enumerar (*i.e.* ponerse en biyección con los números naturales) mediante la sucesión

$$(1,0),\ (0,1),\ (2,0),\ (1,1),\ (0,2),\ (3,0),\ \ldots$$

lo que muestra que $\mathrm{card}(\mathbb{N}^2) = \mathrm{card}(\mathbb{Z}^2) = \aleph_0$. Este argumento se generaliza fácilmente para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Luego, dado que $\mathbb{Z}$ se puede poner en biyección con $\mathbb{N}$, se deduce fácilmente que para todo $k \in \mathbb{N}$ los conjuntos $\mathbb{Z}^k$ y $\mathbb{N}^k$ también se encuentran en biyección, es decir $\mathrm{card}(\mathbb{Z}^k) = \mathrm{card}(\mathbb{N}^k) = \aleph_0$. $\square$

(ii). Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}^k$ es numerable. (En particular, el conjunto de los racionales es numerable).

DEMOSTRACIÓN: Observamos que la función

$$\begin{cases} \varphi \,:\, (\mathbb{N} \cup \{0\}) \times \mathbb{N} & \twoheadrightarrow \mathbb{Q} \\ \qquad\qquad (n,m) & \mapsto \varphi(n,m) = \dfrac{n}{m} \end{cases}$$

es sobreyectiva, por lo cual $\mathrm{card}(\mathbb{Q}) \leq \mathrm{card}(\mathbb{N})$. Dado que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, concluimos que $\mathrm{card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$, y por (i) $\mathrm{card}(\mathbb{Q}^k) = \aleph_0$. $\square$

(iii). Sea A numerable, y X_a numerable para cada $a \in A$. Entonces $\bigcup_{a \in A} X_a$ es numerable.

DEMOSTRACIÓN: En efecto, el hecho que X_a es numerable para cada $a \in A$, implica la existencia de una sobreyección $f_a : \mathbb{N} \twoheadrightarrow X_a$. Definamos entonces una sobreyección

$$\begin{cases} \phi : \mathbb{N} \times A & \twoheadrightarrow \bigcup_{a \in A} X_a \\ \quad (n, a) & \mapsto \phi(n, a) = f_a(n). \end{cases}$$

Notemos que esta demostración requiere del uso del axioma de elección. $\square$

(iv). Como consecuencia de lo anterior, el conjunto $\mathbb{N}^{<\omega}$ de los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ es numerable:

$$\mathbb{N}^{<\omega} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^{[k]},$$

donde

$$\mathbb{N}^{[k]} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \operatorname{card}(A) = k\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Primero observamos que $\mathbb{N}^{[k]}$ se inyecta a $\mathbb{N}^k$, por lo tanto es numerable para todo $k \in \mathbb{N}$. Este resultado se deduce por (iii), tomando $A = \mathbb{N}$ y $X_k = \mathbb{N}^{[k]}$. $\square$

Observación 1.6.12 (i). Una consecuencia directa del Ejemplo 1.6.11(ii) es que el conjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ de puntos de discontinuidad de una función creciente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es numerable. En efecto, a todo $x \in \mathcal{D}$, le asociamos un número racional que se encuentra dentro del intervalo $(f^-(x), f^+(x))$ de $\mathbb{R} \setminus f(\mathbb{R})$ definido por los límites a izquierda y a derecha de f en x. Para distintos puntos de discontinuidad, dichos intervalos son disjuntos, y se define así una inyección de $\mathcal{D}$ a $\mathbb{Q}$.

(ii). Como $\operatorname{card}(\mathbb{N}) = \operatorname{card}(\mathbb{Q})$, existe una biyección $x : \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{Q}$ que define una "enumeración" de $\mathbb{Q}$. En particular $\mathbb{Q} = \{x(n) : n \in \mathbb{N}\} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Por lo que se puede transferir en $\mathbb{Q}$ el buen orden de $\mathbb{N}$. Cabe notar que esta operación depende de la biyección x, es decir, no es canónica.

(iii). En la teoría ZF, cada conjunto numerable admite un buen ordenamiento. En efecto, si X es un conjunto numerable, se puede transferir el buen orden de los naturales $\mathbb{N}$ a X mediante cualquier biyección entre X y $\mathbb{N}$.

El siguiente resultado muestra que se pueden crear conjuntos con cardinalidad estrictamente más grande que cualquier cardinalidad de referencia. El argumento de la demostración, conocido como *argumento diagonal de Cantor*, es parecido al argumento de la paradoja de Russell.

Teorema 1.6.13

(Cantor) Para cada conjunto X no vacío, se tiene que

$$\operatorname{card}(X) < \operatorname{card}(2^X).$$

DEMOSTRACIÓN: La función

$$\begin{cases} f : X \hookrightarrow 2^X \\ \qquad x \mapsto f(x) = \{x\}, \end{cases}$$

es una inyección, por lo tanto $\operatorname{card}(X) \leq \operatorname{card}(2^X)$. Para concluir, necesitamos establecer que no hay sobreyección de X hacia 2^X. De no ser así, existiría una función $g : X \twoheadrightarrow 2^X$ sobreyección, y sea $N = \{x \in X : x \notin g(x)\} \subseteq X$. Como $N \in 2^X$ y g es sobreyectiva, existe $x_0 \in X$ tal que $g(x_0) = N$. Entonces

$$x_0 \in N \iff x_0 \in g(x_0) \iff x_0 \notin N,$$

lo que es una contradicción. □

Mostramos a continuación que el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ tiene cardinalidad estrictamente superior a la cardinalidad de $\mathbb{N}$. Denotamos por c la cardinalidad de $\mathbb{R}$ (que se suele llamar *cardinalidad del continuo*), es decir:

$$\operatorname{card}(\mathbb{R}) = c.$$

Proposición 1.6.14 (Cardinalidad del continuo) *Se tiene que*

$$\operatorname{card}(2^{\mathbb{N}}) = \operatorname{card}(\mathbb{R}) := c.$$

DEMOSTRACIÓN: Dado que $\operatorname{card}(\mathbb{N}) = \operatorname{card}(\mathbb{Q})$, entonces tenemos que $\operatorname{card}(2^{\mathbb{N}}) = \operatorname{card}(2^{\mathbb{Q}})$. Demostraremos que $\operatorname{card}(2^{\mathbb{Q}}) = \operatorname{card}(\mathbb{R})$.

- Para cada $x \in \mathbb{R}$, definamos $\phi(x) = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$. Concluimos inmediatamente que $\phi : \mathbb{R} \hookrightarrow 2^{\mathbb{Q}}$ es una inyección, y por tanto $\operatorname{card}(\mathbb{R}) \leq \operatorname{card}(2^{\mathbb{Q}})$
- Sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Consideremos el número decimal: $1 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} \ldots \in \mathbb{R}$, donde

  $$a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in A \\ 0 & \text{si } i \notin A. \end{cases}$$

  Se define así una inyección $\psi : 2^{\mathbb{N}} \hookrightarrow [0,1] \subseteq \mathbb{R}$.

Concluimos aplicando el Teorema 1.6.3 (Schröder-Bernstein). □

Deacuerdo a la Definición 1.6.7, los cardinales son clases de equivalencia de la relación $X \approx Y \Leftrightarrow \exists f : X \rightarrowtail Y$ (biyección). A estas clases de equivalencia se les puede definir las siguientes operaciones:

Definición 1.6.15

(Aritmética de cardinales) Sean α y β dos números cardinales.

- Definimos $\alpha + \beta = \text{card}(S)$, donde S es un conjunto de la forma $S = A \cup B$, con $\text{card}(A) = \alpha$, $\text{card}(B) = \beta$ y $A \cap B = \varnothing$.

- Definimos $\alpha \cdot \beta = \text{card}(S)$, donde S es un conjunto de la forma $S = A \times B$, con $\text{card}(A) = \alpha$ y $\text{card}(B) = \beta$.

- Definimos $\alpha^\beta = \text{card}(S)$, donde S es un conjunto de la forma

$$S = \prod_{i \in B} A_i \,,$$

donde $\text{card}(A_i) = a$ para todo $i \in B$, y $\text{card}(B) = \beta$.

Es fácil mostrar que estas definiciones son consistentes, en el sentido de que no dependen de ningún conjunto en particular dentro de la clase de equivalencia de los conjuntos de la misma cardinalidad.

El siguiente teorema, nos entrega un resultado importante dentro de los números cardinales infinitos.

Teorema 1.6.16

(Aritmética de cardinales) Sean α, β dos números cardinales, con $\aleph_0 \leq \beta \leq \alpha$. Entonces:

(i) $\alpha + \beta = \alpha$,

(ii) $\alpha \cdot \beta = \alpha$.

demostración: Es claro que

$$\alpha \leq \alpha + \beta \leq \alpha + \alpha \quad \text{y} \quad \alpha \leq \alpha \cdot \beta \leq \alpha \cdot \alpha \,,$$

por lo que podemos suponer que $\alpha = \beta$ y mostrar que $\alpha + \alpha = \alpha$ y $\alpha \cdot \alpha = \alpha$.

(i). Sea A un conjunto con $\text{card}(A) = \alpha$. Usando el Lema de Zorn, podemos encontrar una familia no vacía $\mathcal{F} = \{A_i : i \in I\}$ de subconjuntos de A, maximal para la inclusión, con las siguientes propiedades:

(a) Para cada $i \in I$, $\operatorname{card}(A_i) = \aleph_0$.

(b) Para cada $i, j \in I$, con $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$.

Es fácil ver que si $B = A \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$, entonces B debe ser un conjunto finito. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $B = \varnothing$, ya que tomando cualquier $i_0 \in I$, podemos substituir el conjunto (numerable) A_{i_0} por el conjunto $A_{i_0} \cup B$ (que también es numerable). Entonces $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, de donde tenemos que $\alpha = \operatorname{card}(A) = \aleph_0 \cdot \operatorname{card}(I)$, por lo que $\alpha = \operatorname{card}(\mathbb{N} \times I)$. (Es decir, A se escribe como unión de I-copias de $\mathbb{N}$.)

Consideramos ahora los conjuntos

$$C_0 = 2\mathbb{N} := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\} \quad \& \quad C_1 = 2\mathbb{N} + 1 := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es impar}\}.$$

Entonces $(C_0 \times I) \uplus (C_1 \times I) = \mathbb{N} \times I$, y $(C_0 \times I) \cap (C_1 \times I) = \varnothing$. Por lo que tenemos que

$$\alpha = \operatorname{card}(C_0 \times I) + \operatorname{card}(C_1 \times I) = \aleph_0 \cdot \operatorname{card}(I) + \aleph_0 \cdot \operatorname{card}(I) = \alpha + \alpha.$$

(ii). Sean A un conjunto con $\operatorname{card}(A) = \alpha$ y

$$\mathcal{G} = \{(D, f) : D \subseteq A,\ f : D \rightarrowtail D \times D \text{ es biyectiva}\}.$$

Definimos la siguiente relación de orden

$$(D, f) \leq (E, g) \iff \begin{cases} D & \subseteq & E \\ f & = & g|_D \end{cases}.$$

Podemos observar que $\mathcal{G}$ no es vacío, ya que podemos encontrar un subconjunto $D \subseteq A$ tal que $\operatorname{card}(D) = \aleph_0$. Es fácil ver que $\mathcal{G}$ reúne las hipótesis del Lema de Zorn, por lo que tenemos un elemento maximal $(D, f) \in \mathcal{G}$. Note que si $\delta = \operatorname{card}(D)$, entonces $\delta \cdot \delta = \delta$.
Si pudieramos probar que $D = A$, estaríamos listos. Pero esto no es necesariamente cierto (por ejemplo si $A = \mathbb{N}$, todo subconjunto cofinito es maximal). Sin embargo, probaremos que $\delta = \alpha$. Supongamos que $\delta < \alpha$. Sea $F = A \setminus D$, notemos que $\delta + \operatorname{card}(F) = \alpha$. Como $\delta < \alpha$, por (i) se debe tener que $\operatorname{card}(F) = \alpha$. Entonces existe un subconjunto $E \subseteq F$ con $\operatorname{card}(E) = \delta$. Ahora, consideremos el conjunto

$$P = (E \times E) \uplus (E \times D) \uplus (D \times E),$$

donde las uniones son disjuntas, pues $E \cap D = \varnothing$. Luego,

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(P) &= \operatorname{card}(E \times E) + \operatorname{card}(E \times D) + \operatorname{card}(D \times E) \\ &= \delta \cdot \delta + \delta \cdot \delta + \delta \cdot \delta = \delta + \delta + \delta = \delta = \operatorname{card}(E).\end{aligned}$$

Esto significa que existe una biyección $g : E \rightarrowtail P$. Se puede deducir fácilmente de la relación $E \cap D = \varnothing$ que $P \cap (D \times D) = \varnothing$. Combinando con lo anterior, obtenemos una biyección $h : D \cup E \mapsto (D \times D) \cup P$, tal que $h|_D = f$ y $h|_E = g$. Como tenemos que $(D \times D) \cup P = (D \cup E) \times (D \cup E)$, entonces $(D \cup E, h) \in \mathcal{F}$ lo que contradice la maximalidad de (D, f). $\square$

Corolario 1.6.17 *Si α es un cardinal infinito, y si β es un número cardinal, entonces:*

$$2 \leq \beta \leq 2^\alpha \quad \Longrightarrow \quad \beta^\alpha = 2^\alpha.$$

DEMOSTRACIÓN: Se tiene que $2^\alpha \leq \beta^\alpha \leq (2^\alpha)^\alpha = 2^{\alpha \cdot \alpha} = 2^\alpha$, lo cual demuestra el resultado. $\square$

Observación 1.6.18 Con el corolario anterior, podemos ver que la única forma de obtener distintos cardinales (con las operaciones definidas anteriormente), es a través de potencias entre cardinales.

Dentro de la teoría axiomática ZFC (teoría Zermelo-Fraenkel, enriquecida con el axioma de elección) no se puede probar ni refutar la existencia de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$\aleph_0 < \operatorname{card}(A) < c.$$

Dicho lo anterior, la afirmación intuitiva que c es la "siguiente" cardinalidad (sucesor inmediato[4]) de $\aleph_0$, que denotamos $\aleph_1$, se conoce como *hipótesis del continuo*. Tanto la hipótesis de continuo ($\aleph_1 = c$), como su negación ($\aleph_1 < c$), son consistentes con la axiomática ZFC, y dan lugar a dos teorías distintas (e incompatibles entre ellas).

Más aún, en la teoría ZFC no se puede ni demostrar ni refutar la existencia de conjuntos infinitos A, B tales que $\operatorname{card}(A) < \operatorname{card}(B) < 2^{\operatorname{card}(\mathrm{A})}$. La afirmación $\operatorname{card}(2^{\mathrm{A}})$ es *el cardinal que sigue* a $\operatorname{card}(A)$ se conoce como *hipótesis del continuo generalizada*. Por otra parte, en la teoría ZF, se ha demostrado que el axioma de elección es una consecuencia de la hipótesis del continuo generalizada.

[4] Como veremos a continuación, hablar de *cardinal sucesor* tiene todo su sentido.

1.7. Ordinales

En esta sección, trataremos el tema de los números ordinales. Con el fin de dar una intuición sobre los números ordinales, comenzaremos con la siguiente definición, que generaliza la definición dada en la sección (1.4).

Definición 1.7.1

(Segmento inicial) Sea $(\mathcal{X}, \leq)$ un conjunto bien ordenado y $x \in \mathcal{X}$. Se define el *segmento inicial* como el conjunto $I_x = \{y \in \mathcal{X} : y < x\}$.

Observamos que si $\text{mín}(\mathcal{X})$ es el elemento mínimo de $\mathcal{X}$, entonces $I_{\text{mín}(\mathcal{X})} = \varnothing$.

Teorema 1.7.2

(Principio de Inducción Transfinita) Sea $A \subseteq \mathcal{X}$. Supongamos que para cada $x \in \mathcal{X}$, se tiene que $[I_x \subseteq A \implies x \in A]$. Entonces $A = \mathcal{X}$.

DEMOSTRACIÓN: Notemos que $I_{\text{mín}(\mathcal{X})} = \varnothing \subseteq A \implies \text{mín}(\mathcal{X}) \in A \implies A \neq \varnothing$. Si $A \neq \mathcal{X}$, entonces $\mathcal{X} \setminus A \neq \varnothing$, y existe $x_0 = \text{mín}(\mathcal{X} \setminus A) \notin A$, luego $I_{x_0} \subseteq A \implies x_0 \in A$, lo que es una contradicción. □

El principio de inducción transfinita es la generalización directa del Teorema 1.3.4 (Principio de inducción fuerte), pues así como esta última se utiliza en $\mathbb{N}$, la inducción transfinita se utiliza en cualquier conjunto bien ordenado. El siguiente lema nos ayudará a entender de mejor manera los números ordinales.

Lema 1.7.3 *Si $(\mathcal{X}, \leq)$ es bien ordenado y $A \subseteq \mathcal{X}$, entonces $J = \bigcup_{x \in A} I_x$ es un segmento inicial de $\mathcal{X}$ o es igual a $\mathcal{X}$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $J \neq \mathcal{X}$, entonces $\mathcal{X} \setminus J \neq \varnothing$. Sea $x_0 = \text{mín}(\mathcal{X} \setminus J) \notin J$, por lo tanto, $I_{x_0} \subseteq J$. Note que $I_{x_0} = J$. En efecto, si existiera $y \in J \setminus I_{x_0}$, entonces tendríamos $y \geq x_0$. Como $x_0 \notin J$, se tiene que $y > x_0$. Se deduce que $x_0 \in I_y$. Como $y \in J$, entonces existe $z \in A$ tal que

$$y \in I_z \implies x_0 \in I_z \implies x_0 \in J,$$

lo que es una contradicción. □

Ahora, vamos a utilizar el Lema 1.7.3 para mostrar que dados dos conjuntos bien ordenados, o bien son isomorfos, o bien uno es isomorfo a un segmento inicial del otro.

Proposición 1.7.4 (Dicotomía entre conjuntos bien ordenados) *Sean dos conjuntos $(\mathcal{X}, \leq)$ e $(\mathcal{Y}, \leq)$ bien ordenados. Entonces al menos una de las siguientes alternativas es cierta:*

(i). Existe $\varphi : \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$ inyección isótona tal que $\varphi(\mathcal{X})$ es un segmento de $\mathcal{Y}$ (o todo $\mathcal{Y}$).

(ii). Existe $\psi : \mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{X}$ inyección isótona tal que $\varphi(\mathcal{Y})$ es un segmento de $\mathcal{X}$ (o todo $\mathcal{X}$).

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{F} \subseteq 2^{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}$ el conjunto de inyecciones isótonas entre $\mathcal{X}$ o segmentos de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ o segmentos de $\mathcal{Y}$. Consideramos en $\mathcal{F}$ el orden parcial definido por la inclusión (cada inyección isótona se identifica con su grafo, que es un subconjunto de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$). Sea $(\varphi_i)_{i \in I}$ una cadena de $\mathcal{F}$. Se ve fácilmente que

$$\bigcup_{i \in I} \mathrm{Graph}(\varphi_i)$$

representa el grafo de una función inyectiva e isótona. Se deduce del Lema 1.7.3 que dicha función está definida en un segmento de $\mathcal{X}$ (o todo $\mathcal{X}$) con imagen un segmento de $\mathcal{Y}$ (o todo $\mathcal{Y}$), por lo tanto pertenece a $\mathcal{F}$ y es una cota superior de la cadena $(\varphi_i)_{i \in I}$. Al aplicar el Lema de Zorn, existe un elemento maximal $\varphi : A \mapsto B$, donde A es un segmento de $\mathcal{X}$ (o todo $\mathcal{X}$) y B es un segmento de $\mathcal{Y}$ (o todo $\mathcal{Y}$). Si tanto A como B son segmentos (de $\mathcal{X}$ y resp. de $\mathcal{Y}$), se tiene que $A = I_{x_0}$ y $B = I_{y_0}$, para algunos elementos $x_0 \in A$ y $y_0 \in B$. Entonces la función

$$\widetilde{\varphi} : A \cup \{x_0\} \hookrightarrow B \cup \{y_0\}$$

definida por

$$x \mapsto \widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in A \\ y_0 & \text{si } x = x_0, \end{cases}$$

es una inyección, lo que contradice la maximalidad de φ. Se deduce entonces que $A = \mathcal{X}$ o bien $B = \mathcal{Y}$. Luego, si $A = \mathcal{X}$ (resp. si $B = \mathcal{Y}$) entonces $\varphi : \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$ (resp. $\psi := \varphi^{-1} : \mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{X}$) define un isomorfismo de órdenes. $\square$

Es fácil ver que la existencia de un isomorfismo de órdenes (biyección isótona) define una relación que cumple las propiedades (i)–(iii) de la Definición 1.2.1, por lo tanto una relación de equivalencia en el *conjunto* de los conjuntos bien ordenados (si este último existiera). Con este pequeño abuso, podríamos definir informalmente los *ordinales*, como clases de equivalencia de conjuntos bien ordenados.

A continuación, procederemos a definir formalmente los *ordinales* como representantes *transitivos* de dichas clases de equivalencia.

Definición 1.7.5

(Conjunto Transitivo) Un conjunto x se dice *transitivo* si para todo $y \in X$ se tiene que $y \subseteq x$. En otras palabras, se cumple:

$$\forall y \in x,\ \forall z \in y,\ z \in x.$$

Con la definición anterior, definimos el ordinal de la siguiente forma.

Definición 1.7.6

(Número Ordinal) Un conjunto α se dice un *ordinal*, si α es bien ordenado con respecto a la relación de *pertenencia* $\in$, es transitivo y todo $\beta \in \alpha$ es transitivo.

La propiedad anterior, siendo hereditaria, garantiza que si α es un ordinal y $\beta \in \alpha$, entonces β es un ordinal. El conjunto vacío $\varnothing$ es trivialmente un ordinal (que denotamos por 0), y coincide con el elemento mínimo (con respecto al orden $\in$) de cualquier otro ordinal.

Sea α un ordinal y consideremos $a+1 := a \cup \{a\}$. Entonces $\alpha+1$ también es un ordinal y a se identifica con el segmento I_a del ordinal $a+1$.

Ejemplo 1.7.7 (Construcción de los números naturales en ZF) El segundo axioma de la axiomática ZF asegura la existencia del conjunto vacío (que es trivialmente un ordinal). Tomando $\alpha = \varnothing$, construimos iterativamente todos los números naturales:

$$\begin{aligned}
&1 := \{0\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\},\\
&2 := \{0,1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\},\\
&3 := \{0,1,2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Observación 1.7.8 (i). $\mathbb{N} \cup \{0\}$ es un ordinal (que representa la clase de equivalencia del conjunto bien ordenado $\mathbb{N}$). Efectivamente identificando 1 (elemento mínimo de $\mathbb{N}$) con 0 (conjunto vacío, elemento mínimo de $\mathbb{N} \cup \{0\}$), luego n con $n-1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se obtiene una biyección isótona (isomorfismo de órdenes).

(ii). Más general, sea $(\mathcal{X}, \preceq)$ un conjunto bien ordenado. Identificando cada $x \in \mathcal{X}$ con su segmento I_x (véase (1.7.1)) deducimos que $\min \mathcal{X}$ se identifica con el conjunto vacío $\varnothing$ y para todo $x, y \in \mathcal{X}$ se tiene que:

$$y \prec x \iff y \in x \iff y \subsetneq x. \tag{1.10}$$

Mediante inducción transfinita (si $\mathcal{X}$ es infinito) se establece que (bajo dicha identificación) $\mathcal{X}$ es un ordinal.

Utilizando esta identificación, la Proposición 1.7.4 (Dicotomía entre conjuntos bien ordenados) en el caso de ordinales α y β se traduce en la siguiente *tricotomía*:

(i) α es un segmento de β.

(ii) β es un segmento de α.

(iii) $\alpha = \beta$.

Es bastante natural definir el siguiente *orden* en el *conjunto* de ordinales.

Definición 1.7.9

(Orden en Ordinales) Si α y β son ordinales, definimos

$$\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta \iff \alpha \text{ es un segmento de } \beta\,. \tag{1.11}$$

Observación 1.7.10 (i). Para todo ordinal α, se tiene que $\alpha < \alpha + 1$.

(ii). La relación definida por la Definición 1.7.9 en los ordinales no es realmente una relación de orden, pues la relación $\in$ no refleja, debido al axioma de regularidad. Sin embargo, cumple las demás propiedades de un orden total.

Lema 1.7.11 *Si* $\alpha \neq 0$ *es un ordinal, entonces* $0 < \alpha$*, es decir* 0 *es el ordinal más pequeño.*

DEMOSTRACIÓN: Como $\alpha \neq 0$, entonces $\alpha < 0$ ó $0 < \alpha$. Si $\alpha < 0$, entonces $\alpha \in \varnothing$, lo cual sería una contradicción. $\square$

A partir de ahora, utilizaremos también la notación $[0, x)$ para representar el segmento I_x, cuando x pertenece a un ordinal. El siguiente resultado es muy importante y se demuestra aquí mediante el axioma de elección.

Teorema 1.7.12

(Primer ordinal no numerable) Existe un conjunto $(\Omega, \preceq)$ bien ordenado, no numerable, con la propiedad que todos sus segmentos sean numerables, eso es:

$$\forall x \in \Omega: \;\; I_x = \{y \in \Omega : y \prec x\} \text{ es numerable.}$$

Además, el conjunto es único bajo isomorfismos de órdenes.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{X}$ un conjunto no numerable cualquiera. Consideremos en $\mathcal{X}$ un buen orden $\preceq$ (*c.f.* Teorema de Zermelo). Si $(\mathcal{X}, \preceq)$ no tiene la propiedad deseada, entonces consideramos el conjunto

$$A = \{x \in \mathcal{X} : \aleph_0 \; < \; \mathrm{card}(I_x)\} \neq \varnothing.$$

Sea $\Omega = \mathrm{mín}(A)$. Note que $\Omega \equiv I_\Omega$ tiene la propiedad deseada.

En efecto, si $y \in \Omega$ entonces $y \in I_\Omega$, es decir $y \prec \Omega$, por lo tanto $\mathrm{card}(I_y) \leq \aleph_0$ por la definición del conjunto A.

Mostramos ahora la unicidad del conjunto Ω (bajo isomorfismos de órdenes). Sean Ω, Ω' dos conjuntos bien ordenados con la propiedad anterior. Entonces por la Proposición 1.7.4, existe una inyección isomórfica $\Omega \hookrightarrow \Omega'$ ó bien $\Omega' \hookrightarrow \Omega$. En particular

$$\mathrm{card}(\Omega) > \aleph_0 \quad \text{y} \quad \mathrm{card}(\Omega') > \aleph_0,$$

por lo tanto Ω (resp. Ω') no puede estar en biyección con un segmento de Ω' (resp. Ω). Deducimos que la inyección anterior es biyectiva, y se tiene que $\Omega \cong \Omega'$ (isomorfismo de órdenes). $\square$

A partir de ahora, identificamos Ω con el ordinal que representa su *clase de equivalencia*, eso es, interpretamos $\prec$ como $\in$ (véase (1.10)) e identificamos $\mathrm{mín}\,\Omega$ con $0 \equiv \varnothing$. Sea ω el primer ordinal no finito, es decir,

$$\omega := \mathrm{mín}\,\{\xi \in \Omega : \; \mathrm{card}(\xi) \geq \aleph_0\}\,.$$

Se deduce fácilmente que $\omega := I_\omega \equiv [0, \omega)$ coincide con el ordinal $\mathbb{N} \cup \{0\}$. En efecto, definamos un isomorfismo de órdenes φ entre $\mathbb{N} \cup \{0\}$ y ω como sigue:

$$\begin{cases} \varphi(0) & = \mathrm{mín}(\Omega) \\ \varphi(n) & = \mathrm{mín}(\Omega \setminus (\varphi(0) \cup \ldots \cup \varphi(n-1))) \end{cases}$$

Notamos que cada ordinal α se identifica con el segmento $[0, \alpha+1)$ que define su sucesor, véase también Observación 1.7.10(i). A continuación diferenciaremos los ordinales en dos tipos, los ordinales que son sucesores (de otro ordinal) y los ordinales de tipo límite.

Definición 1.7.13

(Ordinal sucesor/límite) Un ordinal α se dice un *ordinal sucesor* si existe un ordinal β tal que $\alpha = \beta + 1$. Un ordinal $\alpha \neq \varnothing$ se dice un *ordinal límite* si no es un ordinal sucesor, es decir, no tiene un antecesor inmediato.

Observación 1.7.14 Con la definición anterior, tanto ω como Ω son ordinales límites. Por otra parte, la cardinalidad entre un ordinal infinito y su sucesor no cambia. Más aún, el ordinal ω es el primer ordinal límite. En la Figura 1.2 vemos una representación intuitiva de los primeros ordinales.

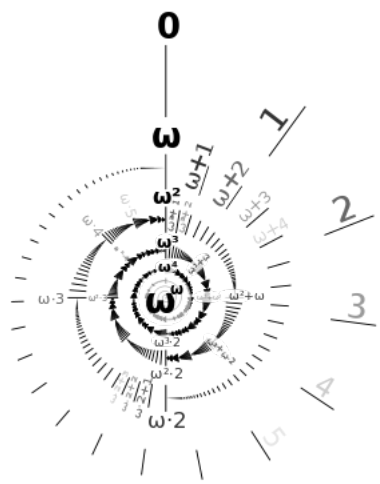

Figura 1.2: Representación de los primeros ordinales hasta ω^ω (Imagen de Wikipedia).

El siguiente lema caracteriza los ordinales límite.

Lema 1.7.15 *Sea α un ordinal. Entonces α es un ordinal límite, si y sólo si $\alpha \neq 0$ y para cada β se tiene que*

$$\beta \in [0, \alpha) \implies \beta + 1 \in [0, \alpha). \tag{1.12}$$

DEMOSTRACIÓN: Sea α un ordinal límite y $\beta < \alpha$. Tenemos entonces la tricotomía $\beta + 1 < \alpha$, ó bien $\alpha < \beta + 1$, ó bien $\beta + 1 = \alpha$. El último caso queda descartado por definición de ordinal límite. Supongamos que $\alpha < \beta + 1$. Entonces $\alpha = \beta$ ó bien $\alpha < \beta$. Como $\beta < \alpha$, entonces si $\alpha = \beta$, se tendría que $\alpha < \alpha$, lo que es una contradicción. Concluimos entonces que $\beta + 1 < \alpha$.

Para mostrar la otra implicación, supongamos por contradicción, que $\alpha \neq 0$ es un ordinal sucesor que cumple (1.12). Entonces existe ξ tal que $\alpha = \xi + 1$. Luego $\xi < \xi + 1 = \alpha$ (en particular $\xi < \alpha$) y por (1.12), tenemos que $\xi + 1 < \alpha$, lo que es una contradicción. Concluimos entonces que α es un ordinal límite. $\square$

Observación 1.7.16 (Cardinales vs Ordinales) Sea λ un cardinal. Tomando $\mathcal{X}$ un conjunto con $\mathrm{card}(\mathcal{X}) = \lambda$ y considerando un buen orden en $\mathcal{X}$, obtenemos un ordinal (mediante la habitual identificación de los elementos de $\mathcal{X}$ con su segmentos). El cardinal λ se puede identificar con el mínimo ordinal de la misma cardinalidad, es decir:

$$\lambda \equiv \min \{\xi : \ \xi \text{ ordinal } \ \& \ \mathrm{card}(\xi) = \lambda \}.$$

Mediante dicha identificación, los cardinales se inyectan dentro de los ordinales, por lo tanto están bien ordenados. En particular, tiene sentido hablar del siguiente cardinal $\aleph_{k+1}$ del $\aleph_k$ (véase formulación de la hipótesis del continuo). Observamos que el cardinal $\aleph_0$ se representa por el ordinal ω, y que todo $\xi \in [\omega, \Omega)$ tiene la misma cardinalidad $\mathrm{card}(\xi) = \aleph_0$.

Finalicemos esta sección con la siguiente observación.

Observación 1.7.17 Fijamos $A \subseteq \Omega \equiv I_\Omega$ cualquier subconjunto *numerable*. Entonces existen dos casos:

(i) A tiene un elemento máximo (es decir, existe $a_x = \max(A)$), por lo tanto

$$A \subseteq I_{a_x} \cup \{a_x\} = I_{a_{x+1}} \subsetneq [0, \Omega),$$

donde a_{x+1} denota el sucesor inmediato de a_x.

(ii) $A \subseteq \bigcup_{x \in A} I_x$.

En el caso (ii) observamos que $\bigcup_{x \in A} I_x$ es numerable (*c.f.* Ejemplo 1.6.11 (iii)), por lo tanto se tiene que $\bigcup_{x \in A} I_x \subsetneq [0, \Omega)$ (por razones de cardinalidad). Se deduce que A tiene una cota superior dentro el conjunto $[0, \Omega) = \Omega$. Sea

$$S = \{x \in \Omega : \ \forall a \in A, a \leq x\} \quad \text{y} \quad a_x = \min(S).$$

Entonces $A \subseteq I_{a_x} \cup \{a_x\}$, es decir, en ambos casos $\sup(A) < \Omega$.

La observación anterior muestra que es imposible obtener Ω como supremo de un subconjunto numerable de Ω. Este resultado se utilizará más adelante, en topología, para distinguir entre las nociones de *compacidad* y *compacidad secuencial*.

2 Espacios Métricos

El concepto de continuidad de una función es de vital importancia en el Análisis Matemático. La búsqueda de definir este concepto en espacios más complicados dio la idea de definir estructuras en donde este concepto pueda ser generalizado, más allá desde el punto de vista de los cursos de Cálculo. Fue en el año 1906 que *Maurice Fréchet* en su artículo *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, introdujo los espacios métricos. Un espacio métrico es un conjunto X al cual se le ha definido una noción de distancia $d(x, y)$ para cada par de puntos $x, y \in X$. Esta noción de espacio métrico será suficiente para poder definir la continuidad de una función, así como conceptos de aproximación o acumulación.

2.1. Definición y ejemplos

Definición 2.1.1

(Espacio métrico) Sea $X \neq \varnothing$ un conjunto. Decimos que la función

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_+$$

es una *distancia* (o una *métrica*) sobre X si cumple las siguientes propiedades:

($\mathbf{D}_1$) para todo $x, y \in X$: $\quad d(x, y) = 0 \iff x = y$;

($\mathbf{D}_2$) para todo $x, y \in X$: $\quad d(x, y) = d(y, x)$ (simetría);

($\mathbf{D}_3$) para todo $x, y, z \in X$: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad triangular).

En tal caso, al par (X, d) lo llamaremos *espacio métrico*. Cuando no haya ambigüedad sobre la distancia, llamaremos al espacio métrico simplemente X.

Es fácil ver que la distancia satisface las siguientes propiedades:

- para todo $n \geq 2$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$: $\quad d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$.

- para todo $x, y, z \in X$: $\quad |d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$.

Observación 2.1.2 (Pseudo-distancia) Una función $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ que cumple solo las propiedades $(\mathbf{D}_2)$ y $(\mathbf{D}_3)$ se dice *pseudo-distancia*. En este caso, es fácil ver que la relación

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad d(x,y) = 0$$

es una relación de equivalencia sobre X. Luego, si $\widehat{X} = (X/\sim)$ es el espacio cociente (espacio de clases de equivalencia), entonces la función

$$\begin{aligned} \tilde{d} : \widehat{X} \times \widehat{X} &\to \mathbb{R}_+ \\ ([x],[y]) &\mapsto \tilde{d}([x],[y]) = d(x,y) \quad \text{con} \quad x \in [x],\ y \in [y] \end{aligned}$$

está bien definida y es una distancia en $\widehat{X}$.

Un ejemplo típico de espacios métricos son los *espacios normados*. Recordamos la definición general de un espacio normado. (A continuación, consideramos siempre espacios vectoriales *sobre el cuerpo* $\mathbb{R}$ *de los reales*.)

Definición 2.1.3

(Espacio normado) Sea E un espacio vectorial. Decimos que la función

$$N : E \to \mathbb{R}_+$$

define una norma en E, si

$(\mathbf{N}_1)$ $N(x) = 0 \iff x = 0$;

$(\mathbf{N}_2)$ para todo $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$ (homotecia);

$(\mathbf{N}_3)$ para todo $x, y \in X$: $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (desigualdad triangular).

Llamamos al par (E, N) espacio normado. Si no hay ambigüedad sobre la norma, denotaremos al espacio normado simplemente por E.

Si (E, N) es un espacio normado, entonces la función

$$\begin{cases} d : X \times X & \to \mathbb{R}_+ \\ \qquad (x,y) & \mapsto d(x,y) := N(x-y),\ \forall x, y \in E \end{cases} \tag{2.1}$$

define una distancia: en efecto la propiedad $(\mathbf{D}_1)$ es inmediata por $(\mathbf{N}_1)$, $(\mathbf{D}_2)$ se obtiene de $(\mathbf{N}_2)$ colocando $\lambda = -1$ y $(\mathbf{D}_3)$ se obtiene expresando $x - z$ como $(x - z) + (z - y)$ y aplicando $(\mathbf{N}_3)$ y $(\mathbf{D}_2)$. Por lo tanto (E, d) es un espacio métrico.

Observación 2.1.4 La distancia definida por (2.1) satisface además lo siguiente:

$(\mathbf{D}_4)$ para todo $x, y, z \in E$: $\quad d(x+z, y+z) = d(x, y) \quad$ (invariancia por traslación);

$(\mathbf{D}_5)$ para todo $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$: $\quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(y, x)$ (homotecia);

Es interesante notar que en un espacio vectorial, las propiedades $(\mathbf{D}_1)$–$(\mathbf{D}_5)$ caracterizan las distancias que *provienen de una norma*. En efecto, si d es una distancia en un espacio vectorial E que satisface adicionalmente $(\mathbf{D}_4)$–$(\mathbf{D}_5)$, entonces la siguiente función define una norma en E para la cual (2.1) se cumple:

$$N(x) = d(x, 0), \quad \forall\, x \in E.$$

En efecto, las propiedades $(\mathbf{N}_1)$ y $(\mathbf{N}_2)$ son inmediatas. Para la propiedad $(\mathbf{N}_3)$, observamos que para cada $x, y \in E$ se tiene que:

$$\begin{aligned} N(x) + N(y) &= N(x) + N(-y) = d(x, 0) + d(0, -y) \\ &\geq d(x, -y) = d(x + y, 0) = N(x + y). \end{aligned}$$

A continuación, veamos algunos ejemplos de espacios métricos que provienen de espacios normados. Consideramos primero los espacios normados de dimensión finita.

Ejemplo 2.1.5 (Espacios normados de dimensión finita) Sea E es un espacio vectorial de dimensión finita $\dim E = d$. Fijando una base en E e identificando cada elemento de E con sus coordenadas en esta base, se establece un isomorfismo entre E y $\mathbb{R}^d$. Por lo tanto, es suficiente tratar el caso $E = \mathbb{R}^d$.

(i) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ – Recta real. Es el ejemplo más básico de un espacio normado. Es fácil ver que si N es una norma en $\mathbb{R}$, entonces existe $\alpha > 0$ tal que $N(t) = \alpha|t|$, para cada $t \in \mathbb{R}$, donde $|\cdot|$ es la función *valor absoluto*. Tomando $\alpha = 1$ obtenemos la distancia habitual de $\mathbb{R}$ dada por $d(s, t) = |s - t|$ para cada $s, t \in \mathbb{R}$.

(ii) $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ – Espacio euclidiano. Consideramos $\mathbb{R}^d$ con su *norma euclidiana*, es decir:

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \tag{2.2}$$

y definimos la distancia (euclidiana)

$$d_2(x, y) = \|x - y\|_2 \text{ para cada } x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Es fácil comprobar que $\|\cdot\|_2$ cumple las propiedades ($\mathbf{N}_1$)–($\mathbf{N}_2$). Sin embargo, la propiedad ($\mathbf{N}_3$) no es tan directa. Postergamos la demostración, porque en el ejemplo (iv) trataremos el caso general de las llamadas *normas-p* (la norma euclidiana corresponde al caso $p = 2$). No obstante, mencionamos que la norma-2 (norma euclidiana) proviene de un *producto escalar* (Definición 2.1.9) lo que nos proporciona una manera más fácil de establecer que es una norma (*c.f.* Proposición 2.1.10).

(iii) $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$. Dos normas conocidas en $\mathbb{R}^d$, son las llamadas *norma-uno* y respectivamente *norma-infinito* (o *norma-supremo*), definidas para cada $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ como sigue:

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{d} |x_i| \quad \text{y} \quad \|x\|_\infty = \max_{i \in \{1,\ldots,d\}} |x_i| \, .$$

Es muy fácil comprobar que ($\mathbf{N}_1$)–($\mathbf{N}_3$) de la Definición 2.1.3 se cumplen.

(iv) $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$. Sea $1 < p < \infty$. La norma-p en $\mathbb{R}^d$, se define mediante la fórmula:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \right)^{1/p} . \tag{2.3}$$

Es fácil ver que $|| \cdot ||_p$ satisface ($\mathbf{N}_1$)–($\mathbf{N}_2$). Sin embargo, la propiedad ($\mathbf{N}_3$) no es directa, y es conocida como la desigualdad de *Minkowski*. Su demostración (véase Proposición 2.1.7) está basada en otra desigualdad, la llamada desigualdad de *Hölder* que procederemos a establecer en la Proposición 2.1.6.

Los casos extremos $p = 1$ y $p = \infty$ corresponden al ejemplo (iii).)

Proposición 2.1.6 (Desigualdad de Hölder) *Sea $x, y \in \mathbb{R}^d$ y $p, q \in (1, \infty)$ tales que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{2.4}$$

Entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{d} x_i \, y_i \right| \quad \leq \quad \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{d} |y_i|^q \right)^{1/q} , \tag{2.5}$$

o en otras palabras

$$\left| \sum_{i=1}^{d} x_i \, y_i \right| \quad \leq \quad ||x||_p \cdot ||y||_q \, .$$

DEMOSTRACIÓN: Mostramos (2.5) en tres pasos.
Paso 1. Para todo $\alpha, \beta > 0$ se tiene que:

$$\alpha\,\beta \,\leq\, \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}\,.$$

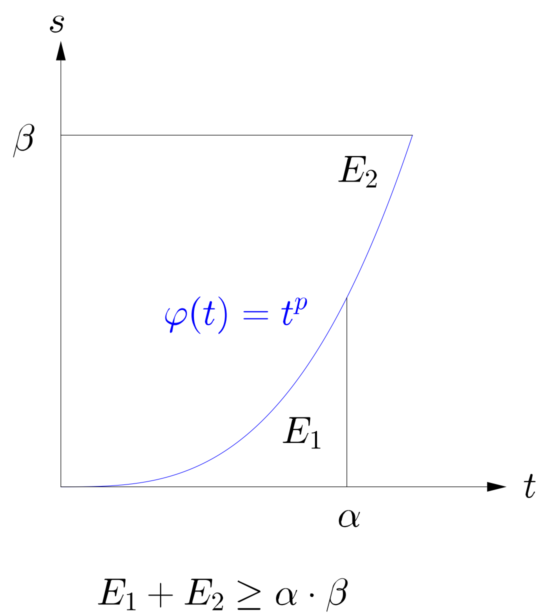

Figura 2.1: Interpretación gráfica de (2.6).

Consideramos la función $\varphi(t) = t^{p-1}$ y observamos que su inversa es $\psi(s) = s^{q-1}$. Entonces se tiene que

$$\int_0^\alpha \varphi(t)\,dt + \int_0^\beta \psi(s)ds \,\geq\, \alpha\beta\,, \tag{2.6}$$

con igualdad si y sólo si $\beta = \varphi(\alpha)$ (véase Figura 33).

Paso 2. Para todo $u, v \in \mathbb{R}^d$ con $\sum_{i=1}^{d} |u_i|^p = \sum_{i=1}^{d} |v_i|^q = 1$ se tiene que $\left|\sum_{i=1}^{d} u_i\,v_i\right| \,\leq\, 1.$

En efecto, para cada $i \in \{1, \ldots, d\}$ aplicamos el Paso 1 para $\alpha = |u_i|$ y $\beta = |v_i|$. Sumando las desigualdades obtenidas se deduce:

$$\left|\sum_{i=1}^{d} u_i\,v_i\right| \,\leq\, \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{d} |u_i|^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{d} |v_i|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Paso 3. Mostramos ahora (2.5). Sean $x, y \in \mathbb{R}^d$ arbitrarios. Si al menos uno de los vectores x e y es igual a 0, entonces (2.5) se cumple trivialmente. Suponiendo entonces que $x \neq 0$ e $y \neq 0$ y considerando $u = x/||x||_p$ y $v = y/||y||_q$ deducimos que $\sum_{i=1}^d |u_i|^p = \sum_{i=1}^d |v_i|^q = 1$. Concluimos por el Paso 2 que $\left|\sum_{i=1}^d u_i\, v_i\right| \leq 1$, o de forma equivalente (2.5) $\square$

Proposición 2.1.7 (Desigualdad de Minkowski) *Sean $p, q \in (1, \infty)$ tales que $1/p + 1/q = 1$. Entonces para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$ se tiene que:*

$$\left(\sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^d |y_i|^p\right)^{1/p}, \tag{2.7}$$

o en otras palabras,

$$||x + y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p \, .$$

DEMOSTRACIÓN: Sean $x, y \in \mathbb{R}^d$. Observamos primero que

$$\sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^d (|x_i| + |y_i|)^p = \sum_{i=1}^d |x_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1} + \sum_{i=1}^d |y_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1} \, .$$

Acotamos las dos últimas sumas mediante la desigualdad de Hölder. En efecto, aplicamos dos veces la desigualdad (2.5), para $x_i' = |x_i|$ (luego para $x_i' = |y_i|$) e $y_i' = (|x_i| + |y_i|)^{p-1}$. Se obtiene así que

$$\sum_{i=1}^d (|x_i| + |y_i|)^p \leq ||x||_p \cdot \left(\sum_{i=1}^d (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)q}\right)^{1/q} + ||y||_p \cdot \left(\sum_{i=1}^d (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)q}\right)^{1/q} .$$

Dado que $(p-1)q = pq - q = p$ se deduce que

$$\left(\sum_{i=1}^d (|x_i| + |y_i|)^p\right) \leq (||x||_p + ||y||_p) \cdot \left(\sum_{i=1}^d (|x_i| + |y_i|)^p\right)^{1/q} .$$

Como $1 - 1/q = 1/p$ deducimos fácilmente (2.7). $\square$

Veamos a continuación unos ejemplos de espacios normados de dimensión infinita.

Ejemplo 2.1.8 (Espacios normados de dimensión infinita) Citamos a continuación unos ejemplos de espacios clásicos de sucesiones o más general, de funciones.

(I) $(\ell^\infty(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$. Sea $\Gamma \neq \varnothing$. Definimos $\ell^\infty(\Gamma)$ como el conjunto de las funciones acotadas de Γ a $\mathbb{R}$. Es fácil comprobar que la función

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in\Gamma} |f(x)|\,, \tag{2.8}$$

es una norma. En particular, $(\ell^\infty(\Gamma), d_\infty)$ es un espacio métrico, donde d_∞ es la distancia dada por (2.1). Destacamos aquí dos casos importantes:

- $\Gamma = \mathbb{N}$, donde se obtiene el espacio normado $\ell^\infty(\mathbb{N})$ (que a veces denotamos por simplicidad ℓ^∞) de las sucesiones acotadas;
- $\Gamma = [0,1]$, que da lugar al espacio $\ell^\infty([0,1])$ de las funciones acotadas de $[0,1]$ a valores en $\mathbb{R}$.

(II) $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Sea $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$. Dado que cada función continua en $[0,1]$ es acotada, este espacio está contenido en $\ell^\infty([0,1])$, y podemos considerar en el la norma definida por (2.8). Abreviando la notación, denotamos dicho espacio por $\mathcal{C}([0,1])$ (donde la referencia al espacio de llegada $\mathbb{R}$ y a la norma $\|\cdot\|_\infty$ son implícitas).

(III) $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_p)$. Consideramos nuevamente el espacio $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de las funciones continuas de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$, y definimos en el la siguiente p-norma $(1 \leq p < \infty)$:

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \quad f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}). \tag{2.9}$$

Si $p = 1$, es muy fácil comprobar que (2.9) define una norma. El caso $p > 1$ es el análogo de la p-norma que vimos en (2.3). La propiedad $(\mathbf{N}_3)$, es decir

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p \text{ para cada } f,g \in \mathcal{C}([0,1]),$$

se establece aproximando las integrales que definen las normas $||f||_p$ y $||g||_p$ (fórmula (2.9)) por las funciones escalonadas correspondientes a la subdivisión del intervalo $[0,1]$ en N sub-intervalos de misma longitud $1/N$ (y tomando el valor máximo de f y g) en cada subdivisión. Luego usamos la desigualdad de Minkowski en el espacio $\mathbb{R}^N$ y pasamos al límite cuando $N \to \infty$. (Dejamos los detalles al lector.) $\square$

(IV) $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ Sea $1 \leq p < +\infty$. Definimos el espacio vectorial de las sucesiones p-sumables:

$$\ell^p = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < +\infty \right\}.$$

A este espacio se le puede definir la siguiente norma

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{1/p}, \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p. \tag{2.10}$$

Igual que en el ejemplo (III), para establecer la propiedad ($\mathbf{N}_3$), fijamos dos sucesiones $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $N \in \mathbb{N}$. En virtud de la desigualdad de Minkowski en $\mathbb{R}^N$ (para los N primeros términos de las sucesiones) se tiene que

$$\left(\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=0}^{N} |y_i|^p\right)^{1/p} \le ||x||_p + ||y||_p\,. \tag{2.11}$$

Pasando al límite cuando $N \to \infty$ se obtiene el resultado. □

Analizaremos a continuación el caso $p = 2$ en el Ejemplo 2.1.5(iv) y en el Ejemplo 2.1.8 (III)-(IV) que es de suma importancia. Como veremos, corresponde al caso donde la norma proviene de un *producto escalar* (véase Observación 2.1.14 más adelante).

Definición 2.1.9

(Producto escalar) Sea E un espacio vectorial. Decimos que una función

$$b : E \times E \to \mathbb{R}$$

define un *producto escalar* (o *producto interno*) sobre E si se cumplen las siguientes propiedades:

($\mathbf{P}_1$) $\forall x \in E: \quad b(x,x) \ge 0 \quad \& \quad (\,b(x,x) = 0 \iff x = 0\,)$.

($\mathbf{P}_2$) $\forall x, y \in E: \; b(x,y) = b(y,x)$.

($\mathbf{P}_3$) para todo $x_1, x_2, y \in E$ y para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$b(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 b(x_1, y) + \lambda_2 b(x_2, y).$$

La propiedad ($\mathbf{P}_3$) nos dice que la función $b(x,y)$ es lineal con respecto a su primera variable. La propiedad ($\mathbf{P}_2$) nos dice que es simétrica, y por lo tanto también es lineal con respecto a la segunda variable. La propiedad ($\mathbf{P}_1$) es conocida como *definida positiva*. En otras palabras, el producto escalar es una forma bi-lineal, simétrica y definida positiva.

Proposición 2.1.10 (Producto escalar vs norma) *Sea E un espacio vectorial equipado con un producto escalar $b : E \times E \to \mathbb{R}$. Sea*

$$N(x) := \sqrt{b(x,x)}, \quad x \in E. \tag{2.12}$$

Entonces para todo $x, y \in E$ se tiene que

$$|b(x,y)| \leq N(x)\, N(y) \quad (\textit{desigualdad Cauchy-Schwarz}). \tag{2.13}$$

En particular la función definida por (2.12) es una norma.

DEMOSTRACIÓN: Mostramos primero la desigualdad Cauchy-Schwarz (2.13). Sean $x, y \in E$ y $t \in \mathbb{R}$. Deducimos de la propiedad $(\mathbf{P}_1)$ que $b(x+ty, x+ty) \geq 0$. Desarrollando esta expresión con la ayuda de la propiedad $(\mathbf{P}_3)$ y utilizando $(\mathbf{P}_2)$ obtenemos:

$$b(x+ty, x+ty) = b(y,y)\, t^2 + 2b(x,y)\, t + b(x,x) \geq 0 \ \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Como el binomio anterior es siempre positivo ó cero, deducimos que no puede tener dos raíces reales distintas, por lo tanto su discriminante es negativo ó cero. Combinando con (2.12) se obtiene (2.13).

Mostramos ahora que (2.12) define efectivamente una norma. Las propiedades $(\mathbf{N}_1)$ y $(\mathbf{N}_2)$ siendo inmediatas, consideramos $x, y \in E$ y establecemos la desigualdad triangular $(\mathbf{N}_3)$. En efecto, combinando (2.12) con (2.13) tenemos:

$$\begin{aligned} (N(x+y))^2 &= b(x+y, x+y) = b(x,x) + 2\, b(x,y) + b(y,y) \\ &\leq (N(x))^2 + 2\, N(x)\, N(y) + (N(y))^2 = (N(x) + N(y))^2 \end{aligned}$$

de donde se deduce el resultado tomando raíces. $\square$

Corolario 2.1.11 $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ *Volvemos al Ejemplo 2.1.5* (ii) *y consideramos la función*

$$b : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$

definida por

$$b(x,y) := \sum_{i=1}^{d} x_i\, y_i \ \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^d \tag{2.14}$$

Es fácil comprobar que $b(x,y)$ (que solemos anotar por $\langle x, y\rangle$) es un producto escalar, es decir, que cumple las propiedades $(\mathbf{P}_1)$-$(\mathbf{P}_3)$. También es inmediato ver que (2.2) es un caso particular de la fórmula general (2.12). Concluimos de la Proposición 2.1.10 que $\|\cdot\|_2$

es una norma en $\mathbb{R}^d$. *Como consecuencia de* (2.13) *obtenemos*

$$|\langle x, y\rangle| \;\leq\; \|x\|_2 \cdot \|y\|_2\,, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \tag{2.15}$$

que es la clásica desigualdad Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^d$. □

Corolario 2.1.12 $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_2)$ *Consideramos ahora el caso* $p = 2$ *del Ejemplo* 2.1.8 (III) y definimos el siguiente producto escalar en $\mathcal{C}([0,1])$ (se comprueba fácilmente que $(\mathbf{P}_1)$-$(\mathbf{P}_3)$ se cumplen)

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx, \quad f, g \in \mathcal{C}([0,1]).$$

Observamos que

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2} = \sqrt{\langle f, g\rangle}\,,$$

por lo tanto $\|\cdot\|_2$ es una norma en $\mathcal{C}([0,1])$. □

Corolario 2.1.13 $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ *Tomamos ahora* $p = 2$ *en el Ejemplo* 2.1.8 (IV) y definimos para cada $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ la función

$$\langle x, y\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n\, y_n\,. \tag{2.16}$$

Mostramos primero que la función $\langle x, y\rangle$ está bien definida, es decir que la serie converge. Fijamos $N \in \mathbb{N}$, y aplicamos (2.15) para obtener que

$$\left|\sum_{i=0}^{N} x_i\, y_i\right| \;\leq\; \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{N} |y_i|^2} \;\leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2\,,$$

donde usamos el hecho que las sucesiones $x = (x_n)_n$ e $y = (y_n)_n$ son elementos de ℓ^2. Tomando el límite cuando $N \to \infty$ se deduce que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\, y_n\right| \;\leq\; \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \;< \infty$$

por lo tanto (2.16) está bien definida. Es inmediato comprobar que (2.16) define un producto escalar. □

El siguiente resultado (que citamos aquí con demostración incompleta) caracteriza las normas que provienen de un producto escalar.

Teorema 2.1.14

(Von Neumann) Sea (E, N) un espacio normado. Entonces la norma N proviene de un producto escalar si y sólo si verifica la *identidad del paralelogramo*:

$$(N(x+y))^2 + (N(x-y))^2 = 2\,(N(x))^2 + 2\,(N(y))^2 \text{ para todo } x, y \in E. \quad (2.17)$$

DEMOSTRACIÓN: Sea N una norma definida mediante la fórmula (2.12). Utilizando la bi-linearidad del producto escalar, es fácil verificar que (2.17) se cumple.

Supongamos ahora que N es una norma que cumple (2.17). En este caso definimos la siguiente función (que pretende ser un producto escalar sobre E):

$$b(x,y) := \frac{1}{4}\left((N(x+y))^2 - (N(x-y))^2\right), \quad \forall x, y \in E. \quad (2.18)$$

Es inmediato verificar las propiedades $(\mathbf{P}_1)$ y $(\mathbf{P}_2)$ de la Definición 2.1.9 y ver que

$$N(x) = \sqrt{b(x,x)} \text{ para cada } x \in E.$$

Para establecer que b es un producto escalar falta comprobar que b es bi-lineal, es decir, que también cumple la propiedad $(\mathbf{P}_3)$. Esta parte es más técnica y se omitirá. $\square$

Ejemplo 2.1.15 (Espacios métricos) Damos a continuación ejemplos de espacios métricos (X, d) que no son espacios normados. Esto es inmediato cuando X no es un espacio vectorial. En caso contrario, nos referimos a la Observación 2.1.4.

(i) (Espacio métrico discreto.) Sea X un conjunto no vacío. Definamos la función

$$\begin{array}{rccl} d: & X \times X & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & d(x,y) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y. \end{array}\right. \end{array}$$

Dicha función se llama *métrica discreta*, y el espacio (X, d) espacio discreto.

(ii) En $\mathbb{R}^d$ podemos definir la p-distancia $(0 < p < 1)$:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d: \quad d_p(x,y) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^p\,. \quad (2.19)$$

Mostramos que (2.19) define efectivamente una distancia. Las propiedades $(\mathbf{D}_1)$ y $(\mathbf{D}_2)$ son inmediatas. Mostramos que $(\mathbf{D}_3)$ también es cierta. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^d$. Mostramos que para todo $i \in \{1, \ldots, d\}$ se tiene que

$$|x_i - z_i|^p \;\leq\; |x_i - y_i|^p + |y_i - z_i|^p. \quad (2.20)$$

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $x_i < y_i < z_i$ (eso es claramente el peor caso). Consideremos $\beta = |x_i - z_i|$, $t = |x_i - y_i|/\beta$ y observemos que

$$1 - t = \frac{|y_i - z_i|}{\beta}.$$

Como $t, 1-t \in (0,1)$ deducimos que $t^p + (1-t)^p \geq t + (1-t) = 1$. De eso obtenemos $(t\beta)^p + ((1-t)\beta)^p \geq \beta^p$, lo que es exactamente (2.20).

Podemos observar que d_p no puede provenir de una norma ya que no cumple la propiedad de la homotecia (véase Observación 2.1.4). □

(iii) (*Espacio de Duncan*) Sea $\mathcal{X}$ el conjunto de sucesiones estrictamente crecientes $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tales que existe el siguiente límite (*densidad* de la sucesión):

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \in \mathbb{N} : x_k \leq n\}\right|.$$

Sean $x, y \in \mathcal{X}$ con $x \neq y$. Denotamos $k(x,y)$ el menor índice $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \neq y_k$ y definamos

$$d(x,y) = \begin{cases} |\delta(x) - \delta(y)| + \dfrac{1}{k(x,y)} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Entonces $(\mathcal{X}, d)$ es un espacio métrico que se conoce como espacio de Duncan.

DEMOSTRACIÓN: Es fácil verificar que $d(x,y) \geq 0$, y si $x = y$, entonces $d(x,y) = 0$. Notemos que si $x \neq y$, entonces $d(x,y) > 0$ (pues $k(x,y) < +\infty$), por lo tanto, si $d(x,y) = 0$ entonces $x = y$.

- Es obvio que la función d es simétrica.
- Sean $x, y, z \in X$, notemos que

$$|\delta(x) - \delta(y)| \leq |\delta(x) - \delta(z)| + |\delta(z) - \delta(y)|$$

(por la desigualdad triangular en $\mathbb{R}$), además

$$k(x,y) \geq \min\{k(x,z), k(z,y)\},$$

de donde se concluye que $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Por lo tanto d es una distancia en X. □

(iv) Sea p un número primo. Para $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, se define

$$|x|_p = p^{-s},$$

donde $s \in \mathbb{Z}$ es el entero tal que x se puede escribir de la forma

$$x = p^s \frac{a}{b},$$

donde a, b son enteros primos relativos entre sí que no tienen a p como factor. Se define también $|0|_p = 0$. Definimos

$$d_p(x, y) = |x - y|_p \text{ con } x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}.$$

Entonces $(\mathbb{Q}, d_p)$ es un espacio métrico.

DEMOSTRACIÓN: Es obvio de la definición que $|x|_p \geq 0$. Si $x = 0$ entonces $|x|_p = 0$ por definición. Luego, si $x \neq 0$ entonces $|x|_p = p^{-s} \neq 0$. Por lo tanto, la función d_p cumple la propiedad $(\mathbf{D}_1)$ de la Definición 2.1.1. Es fácil ver que $d_p(x, y) = d_p(y, x)$ (simetría). Para completar la demostración y establecer que d_p también cumple la propiedad $(\mathbf{D}_3)$, probamos lo siguiente:

(i) $|x|_p = 0 \iff x = 0$. En efecto,

(ii) $|xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$. Sean $x = p^{s_x}\left(\frac{a_x}{b_x}\right)$, $y = p^{s_y}\left(\frac{a_y}{b_y}\right)$ entonces

$$xy = p^{s_x+s_y}\left(\frac{a_x \cdot a_y}{b_x \cdot b_y}\right).$$

Como a_x y a_y no son divisibles por p tampoco lo es $a_x a_y$, lo mismo ocurre para $b_x b_y$, entonces $s = s_x + s_y$ es el exponente que hace que

$$xy = p^s \left(\frac{a}{b}\right) \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ no divisibles por } p.$$

Tenemos entonces que $|xy|_p = p^{-s} = p^{-s_x - s_y} = |x|_p \cdot |y|_p$.

(iii) $|x + y|_p \leq \text{máx}\{|x|_p, |y|_p\}$. Consideramos la misma factorización que en (iii) para x e y y supongamos sin pérdida de generalidad que $s_x \leq s_y$. Entonces

$$\begin{aligned} x + y &= p^{s_x}\frac{a_x}{b_x} + p^{s_y}\frac{a_y}{b_y} \\ &= p^{s_x}\left(\frac{a_x}{b_x} + \frac{p^{s_y - s_x}a_y}{b_y}\right) = p^{s_x}\left(\frac{a_x b_y + p^{s_y - s_x}a_y b_x}{b_x b_y}\right). \end{aligned}$$

Claramente $b = b_x \cdot b_y$ no es divisible por p. Como $s_y - s_x \geq 0$, entonces $p^{s_y - s_x} \in \mathbb{Z}$. Luego $a = a_x b_y + p^{s_y - s_x} a_y b_x \in \mathbb{Z}$ y no es divisible por p, entonces $a_x b_y$ sería divisible por p, entonces se tiene que $x + y = p^{s_x}\frac{a}{b}$, y por lo tanto

$$|x + y|_p = p^{-s_x} = \text{máx}\{p^{-s_x}, p^{-s_y}\} = \text{máx}\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Se deduce fácilmente que $d_p(x, y)$ es una métrica.

2.2. Topología de un espacio métrico

La noción de *bola abierta* (respectivamente *bola cerrada*) que introducimos en la siguiente definición es muy importante para el desarrollo de la teoría de los espacios métricos.

Definición 2.2.1

(Bola abierta/Bola cerrada) Sea (X,d) un espacio métrico. Para cada $x \in X$ y $r > 0$ definimos

- La bola abierta (de centro $x \in X$ y de radio $r > 0$) como el conjunto

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

- La bola cerrada (de centro $x \in X$ y de radio $r > 0$) como el conjunto

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}.$$

Las siguientes propiedades son inmediatas:

(i) Para todo $x \in X$

$$r_1 < r_2 \implies B(x,r_1) \subseteq B(x,r_2).$$

(ii) Para todo $x \in X$ se tiene que

$$\bigcup_{r>0} B(x,r) = \bigcup_{r>0} \overline{B}(x,r) = X \quad \& \quad \bigcap_{r>0} \overline{B}(x,r) = \bigcap_{r>0} B(x,r) = \{x\}. \tag{2.21}$$

(iii) Cada bola abierta contiene una bola cerrada, es decir,

$$r' < r \implies \overline{B}(x,r') \subseteq B(x,r).$$

Procedemos ahora con la definición de un *conjunto acotado* en espacios métricos.

Definición 2.2.2

(Conjunto acotado) Sea (X,d) un espacio métrico y $K \subseteq X$ no vacío. Definimos el *diámetro* de K como

$$\mathrm{diam}(K) \;=\; \sup_{x,y \in K} d(x,y).$$

Diremos que un conjunto $A \subseteq X$ es *acotado* si $\mathrm{diam}(A) < +\infty$.

Proposición 2.2.3 (Caracterización de conjuntos acotados) *Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subseteq X$ no vacío. Entonces los enunciados siguientes son equivalentes:*

(i) *K es acotado.*

(ii) *Existe $\bar{x}$ y $r > 0$ tal que $K \subseteq B(\bar{x}, r)$.*

(iii) *Para todo $x \in X$, existe $r > 0$ tal que $K \subseteq B(x, r)$.*

DEMOSTRACIÓN: (iii)$\Rightarrow$(ii) es obvio.
(ii)$\Rightarrow$(i). Si $K \subseteq B(\bar{x}, r)$, entonces $\operatorname{diam}(K) \leq 2r$, es decir, K es acotado.
(i)$\Rightarrow$(iii). Supongamos que K es acotado. Sea $\alpha := \operatorname{diam}(K)$ y $x \in X$ (arbitrario). Entonces para todo $y, z \in K$ se tiene que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, y) + \alpha$. Si $r = d(x, y) + \alpha$, tenemos entonces $K \subseteq B(x, r)$. $\square$

2.2.1. Conjuntos abiertos

En un espacio métrico (X, d) a partir de las bolas abiertas, se define el concepto fundamental de conjunto abierto.

DEFINICIÓN 2.2.4

(Conjunto abierto - Topología) Sea (X, d) un espacio métrico.

- Un conjunto $\mathcal{U} \subseteq X$ se dice *abierto*, si

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \exists r > 0 : \quad B(x, r) \subseteq \mathcal{U}.$$

- Sea $\Im \subseteq 2^X$ la familia de los conjuntos abiertos del espacio (X, d). Esta familia se llama la *topología* del espacio métrico. (Denotamos la topología por $\Im_X$ cuando hay ambigüedad sobre el espacio, y por $\Im_d$ cuando se consideran más métricas en X.)

A continuación veremos unas propiedades fundamentales de los conjuntos abiertos (es decir, de la topología) de un espacio métrico.

Proposición 2.2.5 (Propiedades de los conjuntos abiertos) *Sea (X, d) un espacio métrico. La familia $\Im$ de los conjuntos abiertos de X verifica lo siguiente:*

($\Im_1$) *$\varnothing, X \in \Im$. (Los conjuntos $\varnothing$, X son abiertos.)*

($\Im_2$) *Unión arbitraria de conjuntos abiertos es abierto.*

($\Im_3$) *Intersección finita de conjuntos abiertos es abierto.*

DEMOSTRACIÓN: La propiedad ($\Im_1$) es obvia, dado que los conjuntos $\varnothing$ y X satisfacen trivialmente la Definición 2.2.4. La propiedad ($\Im_2$) es inmediata: si $\mathcal{U}$ es la unión de los conjuntos abiertos $\mathcal{U}_i$ con $i \in I$, y $x \in \mathcal{U}$, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $x \in \mathcal{U}_{i_0}$. Por ser abierto, el conjunto $\mathcal{U}_{i_0}$ (y por lo tanto $\mathcal{U}$) debe contener una bola $B(x,r)$, para algún valor $r > 0$. Esto muestra que $\mathcal{U}$ es abierto.

Ahora demostraremos ($\Im_3$). Sea $\{\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_m\} \subseteq \Im$. Si $\bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{U}_i = \varnothing$, entonces es abierto por ($\Im_1$). Sino, sea $x \in \bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{U}_i$, luego para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, se tiene que $x \in \mathcal{U}_i$. Dichos conjuntos son abiertos, por lo que existe $r_i > 0$ tal que $B(x, r_i) \subseteq \mathcal{U}_i$. Tomando $r = \text{mín}\{r_1, \ldots, r_m\} > 0$, se tiene que $B(x,r) \subseteq B(x, r_i) \subseteq \mathcal{U}_i$. □

Aparte del conjunto vacío y todo el espacio (que siempre son abiertos), la siguiente proposición asegura que la topología $\Im$ contiene más elementos, si $\text{card}(X) > 2$.

Proposición 2.2.6 *En un espacio métrico, las bolas abiertas son conjuntos abiertos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $y \in B(x,r)$ (es decir, $r_1 := r - d(y,x) > 0$). Mostramos que $B(y, r_1) \subseteq B(x,r)$. En efecto, sea $z \in B(y, r_1)$, es decir $d(y,z) < r_1$. Como consecuencia de la desigualdad triangular se tiene que

$$d(x,z) \leq d(z,y) + d(y,x) < r_1 + d(y,x) = r,$$

lo que muestra que $z \in B(x,r)$. □

A continuación, para todo $x \in X$ denotamos por $\Im_x$ la familia de los abiertos de X que contienen el punto x, es decir:

$$\Im_x := \{\mathcal{U} \in \Im : \; x \in \mathcal{U}\} \tag{2.22}$$

Como consecuencia de la Proposición 2.2.6 se tiene que $B(x,r) \in \Im_x$ para todo $r > 0$.

Observación 2.2.7 (Suficiencia de conjuntos abiertos) Si $(E, ||\cdot||)$ es un espacio normado, $x \in E$ y $r_1 < r_2$, entonces se tiene que $B(x, r_1) \subsetneq B(x, r_2)$. Esto nos proporciona una infinidad no numerable de abiertos que contienen a x (es decir, elementos de $\Im_x$).

En un espacio métrico (X,d), diferentes valores de $r > 0$ no proporcionan necesariamente conjuntos distintos. Sin embargo, $\Im$ contiene suficientes abiertos para distinguir entre puntos distintos:

(*Propiedad de Hausdorff*) Para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen $\mathcal{U} \in \Im_x$, $\mathcal{V} \in \Im_y$ tales que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing$.

En efecto, $B(x,r) \cap B(y,r) = \varnothing$ para todo $r \in (0, d(x,y)/2)$.

La siguiente caracterización es consecuencia directa de la Definición 2.2.4.

Proposición 2.2.8 (Caracterización de conjuntos abiertos) *En un espacio métrico (X,d) un conjunto $\mathcal{U} \subseteq X$ es abierto si y sólo si es unión de bolas abiertas.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{U}$ un conjunto abierto. Entonces para cada $x \in \mathcal{U}$, existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subseteq \mathcal{U}$. Es obvio que la unión, para todo $x \in \mathcal{U}$ de dichas bolas contiene a $\mathcal{U}$, pero también está contenida en $\mathcal{U}$ (dado que cada elemento de la unión lo es). El recíproco es una consecuencia de la propiedad $(\Im_3)$ y la Proposición 2.2.6. $\square$

Ejemplo 2.2.9 Veamos a continuación unos ejemplos de topologías en espacios métricos.

(I) (Topología de $\mathbb{R}$) Consideramos $\mathbb{R}$ con su métrica habitual (véase Ejemplo 2.1.5(i)). Las bolas abiertas $B(s,r)$ de $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ son sus intervalos abiertos $(s-r, s+r)$. Por lo tanto, los abiertos de $\mathbb{R}$ son exactamente uniones de dichos intervalos. Dado que unión de intervalos con intersección no vacía es un intervalo, cada abierto se puede representar de forma única como unión disjunta de intervalos abiertos (no necesariamente acotados). Dicha unión es necesariamente numerable, dado que a cada intervalo se puede asociar un número racional contenido en el.

(II) (Distancia discreta) Sea (X,d) un espacio con la métrica discreta (véase Ejemplo 2.1.15(i)). En éste caso

$$B(x,r) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } r \leq 1 \\ X & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

En éste caso los conjuntos abiertos son todos los subconjuntos de X.

(III) (Espacio métrico finito) Si (X,d) es un espacio métrico y $\operatorname{card}(X) < \aleph_0$, entonces cada conjunto es abierto. En efecto, sea

$$r := \min\{d(x,y) : x \neq y,\ x, y \in X\} > 0.$$

Entonces para todo $x \in X$ se tiene que $B(x,r) = \{x\}$ y por lo tanto $\Im = 2^X$.

2.2.2. Conjuntos cerrados

Una noción completamente vinculada y complementaria a los conjuntos abiertos son los *conjuntos cerrados*.

Definición 2.2.10

(Conjunto cerrado) Un conjunto $F \subseteq X$ se dice *cerrado* si su complemento es abierto, es decir
$$F \subseteq X \text{ cerrado} \qquad \Longleftrightarrow \qquad X \setminus F \in \Im.$$

Denotamos por $\mathcal{F}$ a la colección de los conjuntos cerrados del espacio (X, d). Ahora, veamos las propiedades que cumple dicha familia. (Estas propiedades son duales a las que cumple la familia de los abiertos $\Im$.)

Proposición 2.2.11 (Propiedades de los conjuntos cerrados) *Sea (X, d) un espacio métrico. La familia $\mathcal{F}$ de conjuntos cerrados de X verifica lo siguiente:*

($\mathcal{F}_1$) $\varnothing, X \in \mathcal{F}$. (Los conjuntos $\varnothing$ y X son cerrados.)

($\mathcal{F}_2$) Unión finita de cerrados es cerrado.

($\mathcal{F}_3$) Intersección arbitraria de cerrados es cerrado.

DEMOSTRACIÓN: Las aserciones $(\mathcal{F}_1)$-$(\mathcal{F}_3)$ son consecuencia inmediata de las propiedades $(\Im_1)$-$(\Im_3)$ de la Proposición 2.2.5, tomando complementos. □

La siguiente proposición es análoga a la Proposición 2.2.6.

Proposición 2.2.12 *En un espacio métrico, las bolas cerradas son conjuntos cerrados.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\overline{B}(x, r)$ una bola cerrada. Hay que mostrar que el conjunto
$$\mathcal{U} := X \setminus \overline{B}(x, r)$$
es un conjunto abierto. Sea $y \in \mathcal{U}$ (es decir, $r_1 := d(x, y) - r > 0$). Mostramos que $B(y, r_1) \subseteq \mathcal{U}$. En efecto, sea $z \in B(y, r_1)$, es decir $d(y, z) < r_1$. Como consecuencia de la desigualdad triangular se tiene que
$$d(x, z) \geq d(x, y) - d(y, z) > d(x, y) - r_1 = r,$$
lo que muestra que $z \in \mathcal{U}$. □

Corolario 2.2.13 (Conjuntos finitos) *En un espacio métrico cada conjunto finito es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Como las bolas cerradas $\overline{B}(x,r)$ son conjuntos cerrados, se deduce de la fórmula (2.21) y la propiedad $(\mathcal{F}_3)$ que el conjunto *singleton* $\{x\}$ es cerrado para todo $x \in X$. El resultado se deduce ahora de la propiedad $(\mathcal{F}_2)$. $\square$

Recordemos que un subconjunto de un espacio métrico (X,d) puede ser abierto y cerrado a la vez, como por ejemplo los conjuntos $\varnothing$ y X que son siempre abiertos y cerrados en cada espacio métrico. En varios casos importantes, como los espacios normados, dichos conjuntos son los únicos con esta propiedad. En el otro extremo, encontramos el espacio discreto (véase Ejemplo 2.2.9 (II)-(III)) donde $\Im = \mathcal{F} = 2^X$ y por lo tanto cada conjunto es abierto y cerrado.

Los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados son fundamentales en la teoría de espacios métricos. Para ello introducimos las siguientes definiciones que asocian a cada conjunto un conjunto abierto (su interior) y un conjunto cerrado (su clausura) de forma natural.

DEFINICIÓN 2.2.14

(Interior) Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Definimos el *interior* $\mathrm{int}(A)$ (que a veces denotamos por A^o) del conjunto A mediante la fórmula:

$$\mathrm{int}(A) = \bigcup \{\mathcal{U} \in \Im_X : \mathcal{U} \subseteq A\}.$$

De la definición se sigue que

- $\mathrm{int}(A)$ es un conjunto abierto; y
- $\mathrm{int}(A)$ es el conjunto abierto más grande que está contenido en A.

DEFINICIÓN 2.2.15

(Clausura o adherencia) Sea (X,d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Definimos la *clausura* (o *adherencia*) del conjunto A, que anotamos por $\mathrm{adh}(A)$ (a veces también por $\mathrm{cl}\,(A)$ o $\overline{A}$) mediante la fórmula:

$$\mathrm{adh}(A) = \bigcap \{K \in \mathcal{F} : A \subseteq K\}.$$

De la definición se sigue que

- $\mathrm{adh}(A)$ es un conjunto cerrado; y
- $\mathrm{adh}(A)$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene al conjunto A.

Es importante notar que la unión en la definición de interior no se toma sobre un conjunto vacío, pues $\varnothing$ es siempre un conjunto abierto. De la misma forma, la intersección en la definición de clausura tampoco se toma sobre un conjunto vacío, pues X es siempre un conjunto cerrado. Ahora veamos algunas propiedades sobre el interior y la clausura de un conjunto.

Proposición 2.2.16 *Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Se tiene que:*

$$\mathrm{int}(A) \subseteq A \subseteq \mathrm{adh}(A)\,. \tag{2.23}$$

Además

$$A = \mathrm{int}(A) \quad \Longleftrightarrow \quad A \in \Im \;\; (A \text{ es abierto}). \tag{2.24}$$

$$A = \mathrm{adh}(A) \quad \Longleftrightarrow \quad A \in \mathcal{F} \;\; (A \text{ es cerrado}). \tag{2.25}$$

DEMOSTRACIÓN: Las inclusiones (2.23) son consecuencias inmediatas de la Definición 2.2.14 y la Definición 2.2.15. La implicanción ($\Rightarrow$) en las relaciones (2.24) y (2.25) es trivial, mientras que la implicanción ($\Leftarrow$) es consecuencia del hecho que si A es abierto (resp. cerrado) entonces $A \subseteq \mathrm{int}(A)$ (resp. $\mathrm{adh}(A) \subseteq A$). $\square$

La siguiente proposición es muy útil, pues nos dará una caracterización más fácil para poder trabajar con el interior y la adherencia de un conjunto. (Recordamos la notación $\Im_x$ introducida por (2.22).)

Proposición 2.2.17 *Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Se tiene que:*

(i) $x \in \mathrm{adh}(A)$ *si y sólo si para todo* $\mathcal{V} \in \Im_x$*, se tiene que* $\mathcal{V} \cap A \neq \varnothing$.

(ii) $x \in \mathrm{int}(A)$ *si y sólo si existe* $r > 0$ *tal que* $B(x,r) \subseteq A$.

DEMOSTRACIÓN: (i). Sea $x \in \mathrm{adh}(A)$ y $\mathcal{V} \in \Im_x$. Supongamos que $\mathcal{V} \cap A = \varnothing$. Entonces $A \subseteq F := X \setminus \mathcal{V}$. Dado que F es cerrado, se deduce $\mathrm{adh}(A) \subseteq X \setminus \mathcal{V}$ lo que contradice el hecho que $x \in \mathrm{adh}(A) \cap \mathcal{V}$.

Para el recíproco, supongamos que $x \notin \mathrm{adh}(A)$, por lo tanto existe un conjunto cerrado F tal que $A \subseteq F$ y $x \notin F$. Entonces $x \in \mathcal{V} := X \setminus F$ (es decir, $\mathcal{V} \in \Im_x$) y $(X \setminus F) \cap A = \varnothing$, lo que contradice nuestra hipótesis.

(ii). Sea $x \in \mathrm{int}(A)$. Entonces existe un conjunto abierto $\mathcal{U}$ tal que $x \in \mathcal{U} \subseteq A$. Como $\mathcal{U}$ es abierto, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq \mathcal{U} \subseteq A$.
Supongamos ahora que $B(x,r) \subseteq A$. Como $B(x,r)$ es abierto (*c.f.* Proposición 2.2.6), entonces $B(x,r) \subseteq \mathrm{int}(A)$, y por lo tanto $x \in \mathrm{int}(A)$. $\square$

Definición 2.2.18

(Frontera) Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Definimos la *frontera* de A como el conjunto

$$\partial A = \operatorname{adh}(A) \setminus \operatorname{int}(A).$$

Es fácil ver que la frontera es un conjunto cerrado, pues es la intersección de los cerrados $\operatorname{adh}(A)$ y $X \setminus \operatorname{int}(A)$.

Ejemplo 2.2.19 Veamos a continuación unos ejemplos típicos.

(i) Considerando $\mathbb{R}$ como espacio métrico, los conjuntos $\mathbb{Z}$ (números enteros) y $\mathbb{Q}$ (racionales) tienen interior vacío (no contienen ningún intervalo). Por otra parte, $\mathbb{Z}$ es cerrado (su complemento es la unión de los intervalos abiertos $(-n, n)$, $n \in \mathbb{Z}$), mientras que $\operatorname{adh}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ (*c.f.* Proposición 2.2.17: cada intervalo $(x - r, x + r)$ contiene al menos un número racional). Se deduce que $\mathbb{Z}$ coincide con su frontera, mientras que $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

(ii) En un espacio normado $(E, ||\cdot||)$ la clausura de la bola abierta $B(x, r)$ es la bola cerrada $\overline{B}(x, r)$. La frontera de ambos conjuntos coincide con la esfera

$$\partial\left(B(x, r)\right) = \partial\left(\overline{B}(x, r)\right) = S(x, r) := \{y \in E : \ ||x - y|| = r\}.$$

2.2.3. Convergencia de sucesiones

La noción de convergencia de sucesiones es muy natural en el marco de los espacios métricos: una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un $x \in X$ si las distancias $d(x_n, x)$ de x_n a x (que es una sucesión de números reales positivos) se acercan a cero.

Definición 2.2.20

(Convergencia de sucesiones) Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ se dice *convergente*, si existe $\bar{x} \in X$ tal que

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_0)\,(d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon). \tag{2.26}$$

Denotaremos lo anterior por $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ o simplemente por $(x_n) \to \bar{x}$.

Observación 2.2.21 (Unicidad del límite) La propiedad de Hausdorff (*c.f.* Observación 2.2.7) asegura que una sucesión convergente no puede tener más que un límite.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión convergente. Una consecuencia inmediata de la relación (2.26) es que para todo $m, n \geq n_0$

$$d(x_n, x_m) \;\leq\; d(x_n, \bar{x}) + d(x_m, \bar{x}) < 2\varepsilon,$$

es decir, los elementos de una sucesión convergente "se acercan entre ellos". Esta observación da lugar a la siguiente definición:

Definición 2.2.22

(Sucesión de Cauchy) Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ se dice *sucesión de Cauchy*, si

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n, m \geq n_0)\;(d(x_n, x_m) < \varepsilon). \tag{2.27}$$

De lo anterior, se concluye inmediatamente que toda sucesión convergente es de Cauchy.

Observación 2.2.23 Es fácil ver que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, entonces es acotada, es decir, el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de sus valores es un conjunto acotado (*c.f.* Definición 2.2.2). En efecto, para $\varepsilon = 1$ sea $n_0 \in \mathbb{N}$ dado por (2.27). Definamos:

$$r := \max\left\{1,\; d(x_1, x_{n_0}), \ldots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0})\right\}.$$

Se deduce que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq B(x_{n_0}, r)$, por lo tanto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado, en virtud de la Proposición 2.2.3. $\square$

Tanto la Definición 2.2.20 como la Definición 2.2.22 son definiciones expresadas en términos de la distancia. Sin embargo, la primera se puede reformular en términos de conjuntos abiertos (sin tener en cuenta la distancia). Eso representa una diferencia fundamental entre las dos definiciones (la segunda es puramente métrica), de hecho, veremos más adelante que las definiciones no son equivalentes, es decir, existen espacios métricos que tienen sucesiones de Cauchy no convergentes.

A continuación, observamos que las partes $(\forall\varepsilon > 0)$ y $(d(\bar{x}, x_n) < \varepsilon)$ en la fórmula (2.26) se pueden reemplazar por: $(\forall\, B(\bar{x}, \varepsilon))$ y respectivamente $(x_n \in B(\bar{x}, \varepsilon))$. La siguiente proposición afirma que las bolas abiertas se pueden substituir (con efectos equivalentes) por conjuntos abiertos de $\Im_{\bar{x}}$, dando lugar a una definición puramente topológica.

Proposición 2.2.24 (Caracterización topológica de la convergencia) *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en el espacio métrico (X, d). Los enunciados siguientes son equivalentes:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$

(ii) Para cada $\mathcal{U} \in \Im_{\bar{x}}$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geq n_0$ *se tiene que* $x_n \in \mathcal{U}$.

DEMOSTRACIÓN: Mostramos (i)⇒(ii). Sea $\mathcal{U} \in \Im_{\bar{x}}$. Como $\mathcal{U}$ es abierto y $\bar{x} \in \mathcal{U}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\bar{x}, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ dado por la Definición 2.2.20. Se deduce que $x_n \in B(\bar{x}, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$ para todo $n \geq n_0$, que es lo que necesitamos. La implicación (ii)⇒(i) es inmediata: $B(\bar{x}, \varepsilon) \in \Im_{\bar{x}}$ para todo $\varepsilon > 0$. □

A continuación veremos la importancia de las sucesiones en los espacios métricos, empezando con la siguiente proposición.

Proposición 2.2.25 (Caracterización de los conjuntos cerrados) *Sea* (X, d) *un espacio métrico y* $\Gamma \subseteq X$. *Los enunciados siguientes son equivalentes:*

(i) Γ *es cerrado.*

(ii) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Gamma$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x} \in X$, *entonces* $\bar{x} \in \Gamma$

(es decir, Γ *contiene los límites de sus sucesiones convergentes).*

DEMOSTRACIÓN: (i)⇒ (ii). Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Gamma$ una sucesión convergente a $x \in X$ y supongamos que $x \notin \Gamma$, es decir, $x \in \mathcal{U} := X \setminus \Gamma$. Como $\mathcal{U} \in \Im_x$, se deduce de la Proposición 2.2.24(ii) que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \mathcal{U}$ (de hecho eso es cierto para todo n suficientemente grande). Se obtiene así una contradicción.

(ii)⇒(i). Si $X \setminus \Gamma$ no es abierto, entonces existe $\bar{x} \in X \setminus \Gamma$ tal que para cada $n \geq 1$,

$$B\left(\bar{x}, \frac{1}{n}\right) \cap X \setminus \Gamma \neq \varnothing.$$

Escogiendo $x_n \in B(\bar{x}, \frac{1}{n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$ se obtiene una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Gamma$ tal que $d(x_n, x) \leq \dfrac{1}{n}$, es decir $(x_n) \to \bar{x} \notin \Gamma$, lo que es una contradicción. □

A continuación caracterizamos los puntos de adherencia de un conjunto mediante sucesiones convergentes.

Proposición 2.2.26 (Caracterización de puntos de adherencia) *Sea* (X, d) *un espacio métrico,* $A \subseteq X$ *y* $\bar{x} \in X$. *Los enunciados siguientes son equivalentes:*

(i) $\bar{x} \in \mathrm{adh}(A)$ *;*

(ii) $\forall \mathcal{V} \in \Im_{\bar{x}} : A \cap \mathcal{V} \neq \varnothing$ *;*

(iii) $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A : (x_n) \to \bar{x}$.

DEMOSTRACIÓN: La equivalencia (i)$\Leftrightarrow$(ii) está mostrada en la Proposición 2.2.17 (i).

(ii)$\Rightarrow$ (iii). Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos $\mathcal{V}_n := B(\bar{x}, 1/n)$ y tomamos $x_n \in A \cap \mathcal{V}_n$. Se construye así una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ que converge a $\bar{x}$.

(iii)$\Rightarrow$ (i). Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \subseteq \mathrm{adh}(A)$ tal que $x_n \to \bar{x}$. Como $\mathrm{adh}(A)$ es cerrado, se deduce de la Proposición 2.2.25 que $x \in \mathrm{adh}(A)$ que es lo que necesitamos. □

Introducimos a continuación la noción de *sub-sucesión* de una sucesión. Recordamos que una sucesión en un espacio métrico (X, d) es formalmente una función $x : \mathbb{N} \to X$ que se suele anotar por sus valores $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

DEFINICIÓN 2.2.27

(Sub-sucesión) Sea $x \in X^{\mathbb{N}}$ una sucesión en X (que denotamos por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Llamamos *sub-sucesión* de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la composición $y := x \circ k$, donde $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una sucesión estrictamente creciente en $\mathbb{N}$. Dicha composición define una sucesión $y_n = x_{k(n)}$ en X, que solemos anotar por $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$, y cuyos valores son un subconjunto de los valores de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

El siguiente resultado asegura la convergencia de una sucesión de Cauchy, mediante la convergencia de cualquier sub-sucesión de dicha sucesión.

Proposición 2.2.28 *Sea (X, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy que posee una sub-sucesión convergente. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que existe $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente, tal que $\lim_{n\to\infty} x_{k(n)} = \bar{x}$. Sea $\varepsilon > 0$ y $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k(n) \geq n_1$, $d(x_{k(n)}, x) < \varepsilon/2$, y sea $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo par $n, m \geq n_2$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ (tal n_2 existe por que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy). Definimos $N = \max\{n_1, n_2\}$ y sea $n \geq N$. Como k es una función estrictamente creciente, entonces $k(n) \geq n \geq N$, por lo que

$$d(x_n, x) \;\leq\; d(x_n, x_{k(n)}) + d(x, x_{k(n)}) \;<\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;<\; \varepsilon,$$

de donde concluimos que $x_n \to x$. □

Demostraremos ahora el siguiente resultado.

Proposición 2.2.29 *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión del espacio métrico (X,d) y $x \in X$. Los enunciados siguientes son equivalentes:*

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* x *;*

(ii) *Cada sub-sucesión de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* x *;*

(iii) *Cada sub-sucesión de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente, y al menos una converge a* x*.*

DEMOSTRACIÓN: (i)⇒(ii) es inmediato por la Definición 2.2.20 y la definición de sub-sucesión. (ii)⇒(iii) es obvio, y (ii)⇒(i) es consecuencia del hecho que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sub-sucesión trivial de si-misma. Falta establecer que (iii)⇒(ii). Supongamos que existen dos sub-sucesiones $x \circ k_1$ y $x \circ k_2$ con distintos límites $x_1 \neq x_2$. Tomando $r = d(x_1,x_2)/3$, definimos dos bolas disjuntas $B(x_1,r) \in \Im_{x_1}$ y $B(x_2,r) \in \Im_{x_2}$. Como consecuencia de la convergencia de las dos sub-sucesiones, existen subconjuntos infinitos $N_1, N_2 \subseteq \mathbb{N}$ tales que para $i \in \{1,2\}$ y todo $n \in N_i$ se tiene que $x_n \in B(x_i,r)$. De forma recursiva, se puede entonces construir una sub-sucesión $x \circ k$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que tiene infinitos términos en ambas bolas $B(x_1,r)$ y $B(x_2,r)$. Dado que para cada par de elementos $x \in B(x_1,r)$ e $y \in B(x_2,r)$ se tiene que $d(x,y) \geq d(x_1,x_2)/3 := \alpha > 0$ concluimos que la subsucesión definida no es de Cauchy, por lo tanto no puede converger. $\square$

Una sucesión no convergente puede tener sub-sucesiones que convergen en distintos límites. Dichos límites se conocen como ω-límites de la sucesión.

DEFINICIÓN 2.2.30

(ω-límite de una sucesión) Se dice que $\bar{x} \in X$ es un ω-límite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si para cada $\varepsilon > 0$ y $m \in \mathbb{N}$, existe $k \geq m$ tal que $d(x_k, \bar{x}) < \varepsilon$.

Proposición 2.2.31 (Caracterización de ω-límites mediante sub-sucesiones) *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Los enunciados siguientes son equivalentes:*

(i) $\bar{x}$ *es un ω-límite de una sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

(ii) *Existe una sub-sucesión* $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *que converge a* $\bar{x}$*.*

DEMOSTRACIÓN: (ii)⇐(i) es inmediato de la definición de la convergencia y de la sub-sucesión. Mostramos que (i)⇒(ii). En la Definición 2.2.30, empezando por $\varepsilon_1 > 0$ y $m = 1$, se obtiene $k = k(1)$ tal que $d(x_{k(1)}, \bar{x}) < 1$. Tomando ahora $\varepsilon_n := 1/n$ y $m = k(n-1)+1$ se define de forma recursiva una sucesión $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente, tal que $x_{k(n)} \to \bar{x}$. □

Aparte de caracterizar los ω-límites, las sub-sucesiones también sirven para caracterizar la falta de convergencia hacia un punto determinado.

Proposición 2.2.32 *Si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $\bar{x} \in X$, entonces existe $\varepsilon > 0$ y una función estrictamente creciente $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $(x_{k(n)})_{n\geq 1} \subseteq X \setminus B(\bar{x}, \varepsilon)$.*

DEMOSTRACIÓN: Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $\bar{x}$, entonces existe $\varepsilon > 0$, tal que

$$\text{para cada } n \in \mathbb{N} \text{ existe } m^* \geq n \text{ tal que } d(\bar{x}, x_{m^*}) \geq \varepsilon. \tag{2.28}$$

Sea $k(1)$ el mínimo m^* que satisface (2.28) con $n = 1$. Luego, para todo $n \geq 2$ definimos de forma recursiva $k(n)$ como el mínimo $m^* \geq k(n-1) + 1$ tal que $d(\bar{x}, x^*_m) \geq \varepsilon$. Se obtiene así una sucesión $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente, definiendo una sub-sucesión $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ que cumple lo pedido. □

2.2.4. Puntos de acumulación - Índice Cantor-Bendixson

En esta sección introducimos un concepto muy importante en análisis, el concepto de punto de acumulación de un conjunto. Daremos la definición en términos puramente topológicos.

DEFINICIÓN 2.2.33

(Punto de acumulación – punto aislado) Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$.

(i) Un punto $\bar{x} \in X$ se dice *punto de acumulación* del conjunto A, si cada abierto que contiene $\bar{x}$, debe contener al menos un punto de A distinto de $\bar{x}$, es decir

$$\forall \mathcal{U} \in \Im_{\bar{x}} : A \cap \mathcal{U} \setminus \{\bar{x}\} \neq \varnothing. \tag{2.29}$$

(ii) Un punto $x_0 \in A$ se dice *punto aislado* del conjunto A, si existe un abierto que solo contiene a x_0, es decir,

$$\exists \mathcal{U} \in \Im_{x_0} : A \cap \mathcal{U} = \{x_0\}. \tag{2.30}$$

Cabe destacar que un punto de acumulación de un conjunto A no necesariamente pertenece al conjunto, mientras que los puntos aislados de A son puntos de dicho conjunto.

Observación 2.2.34 Mencionamos en continuación unas consecuencias directas de la Definición 2.2.33.

(i) Si $\bar{x}$ es un punto de acumulación del conjunto A, entonces para cada $\mathcal{U} \in \Im_{\bar{x}}$ se tiene que

$$\mathrm{card}(A \cap \mathcal{U}) \geq \aleph_0. \tag{2.31}$$

En efecto, si el conjunto $A \cap \mathcal{U}$ es finito para algún $\mathcal{U} \in \Im_{\bar{x}}$, entonces denotamos por $\bar{r} > 0$ la mínima distancia de $\bar{x}$ con los otros elementos del conjunto finito $A \cap \mathcal{U}$, y observamos que $A \cap (\mathcal{U} \cap B(\bar{x}, \bar{r})) = \{\bar{x}\}$, lo que contradice (2.29).

(ii) La relación (2.29) es equivalente a lo siguiente:

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad A \cap (B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\}) \neq \varnothing,$$

y por lo tanto, tomando $\varepsilon_n := 1/n$ a la existencia de una sucesión en $A \setminus \{\bar{x}\}$ que converge en $\bar{x}$.

(iii) La relación (2.30) es equivalente a lo siguiente:

$$(\exists \varepsilon > 0) \;\; (B(x_0, \varepsilon) \cap A = \{x_0\}).$$

Denotaremos a continuación por A' al conjunto de los puntos de acumulación de A. Dicho conjunto lo llamamos *conjunto derivado* de A. El conjunto de los puntos aislados de A se identifica con $A \setminus A'$.

Proposición 2.2.35 (Propiedades del conjunto derivado) *Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y A' su conjunto derivado. Entonces:*

(i) A' es cerrado y $A' \subseteq \mathrm{adh}(A)$.

(ii) $\mathrm{adh}(A) = A' \mathbin{\dot\cup} (A \setminus A') = A \cup A'$.

(iii) Si $S_1 \subseteq S$, entonces $S_1' \subseteq S'$.

DEMOSTRACIÓN: Mostramos (i). Sea $a \in \mathrm{adh}(A')$. Entonces aplicando la parte (iii) de la Proposición 2.2.26, obtenemos una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A'$ con $d(y_n, a) < 1/2n$. Obviamente $B(y_n, 1/2n) \in \Im_{y_n}$. Como y_n es un punto de acumulación del conjunto A, de acuerdo con (2.29) existe $x_n \in B(y_n, 1/2n) \cap A$. (Además x_n es distinto de y_n, aunque esta información no es relevante aquí.) Se obtiene entonces una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que

$$d(x_n, a) \;\leq\; d(x_n, y_n) + d(y_n, a) < \frac{1}{n}$$

lo que implica que $(x_n) \to a$. Esto muestra que $\mathrm{adh}(A') \subseteq A'$ por lo tanto $A' = \mathrm{adh}(A')$, es decir, A' es cerrado.

La inclusión $A' \subseteq \mathrm{adh}(A)$ es una consecuencia directa de la Proposición 2.2.26(iii) y (2.29).

(ii). Se deduce de (i) que $A \cup A' = A' \cup (A \setminus A') \subseteq \mathrm{adh}(A)$. Mostramos la inclusión contraria. Sea $x \in \mathrm{adh}(A)$. Por la Proposición 2.2.26, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \to x$. Si para algún $n \in \mathbb{N}$ se tiene $x_n = x$, entonces se deduce que $x \in A$. Sino, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_n \neq x$, y por lo tanto $x \in A'$ (véase (ii) de la Observación 2.2.34). Concluimos entonces que $\mathrm{adh}(A) = A' \cup A$.

(iii) Es consecuencia directa de la Definición 2.2.33 (i). $\square$

El siguiente resultado se deduce inmediatamente de la parte (ii) de la Proposición 2.2.35.

Corolario 2.2.36 *Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Entonces*

$$A' \subseteq A \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ es cerrado.} \tag{2.32}$$

Presentamos a continuación unos ejemplos típicos de conjuntos derivados en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.2.37 (Ejemplos de conjuntos derivados en $\mathbb{R}$) Consideramos $\mathbb{R}$ como espacio normado y miraremos los conjuntos derivados y los puntos aislados de algunos subconjuntos característicos.

(i) $\mathbb{Z}' = \varnothing$, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}' = \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}' = \varnothing$.

(ii) $\mathcal{N} = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{N}' = \{0\}$, $\mathcal{N} \setminus \mathcal{N}' = \mathcal{N}$.

(iii) $A = (0,1] \cup \{2\}$, $A' = [0,1]$, $A \setminus A' = \{2\}$.

(iv) $K = [0,1]$, $K' = [0,1]$.

En el último ejemplo, el conjunto $[0,1]$ es igual a su conjunto derivado. Conjuntos con esta propiedad son necesariamente cerrados (véase (2.32)) y no tienen puntos aislados. Dichos conjuntos se llaman perfectos.

Definición 2.2.38

(Conjunto perfecto) Sea (X,d) un espacio métrico, un conjunto $K \subseteq X$ se dice *perfecto* si $K = K'$.

Ejemplo 2.2.39 (i) Consideremos $X = \mathbb{Q}$ como espacio métrico, con distancia dada por el valor absoluto. Obviamente $\mathbb{Q}$ es cerrado (y abierto) en si mismo, y no tiene puntos aislados, por lo tanto $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$ es perfecto y numerable.

(ii) Consideramos ahora $\mathbb{Q}$ como subconjunto del espacio métrico $X = \mathbb{R}$ (siempre con la métrica habitual que se define por el valor absoluto). En este caso $\mathbb{Q}$ no es perfecto, ya que $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

Hemos visto que el conjunto derivado A' de cualquier conjunto A es siempre cerrado. Por lo tanto, si consideramos su conjunto derivado $(A')' := A''$ se tiene que $A'' \subseteq A'$, con igualdad si y sólo si A' no tiene puntos aislados (es decir, es perfecto). Si esta situación no ocurre, podemos reiterar el proceso tomando la tercera derivada $A^{(3)} \subseteq A''$, luego la cuarta, etc; esperando obtener un subconjunto perfecto de A (que puede ser el conjunto vacío). Observamos que mientras no alcancemos nuestro objetivo (*c.f.* obtener un conjunto perfecto), entonces en cada etapa, estamos quitando puntos del conjunto A' (o de A, si es cerrado). Sin embargo, en general este proceso puede no terminar en un número finito de iteraciones. Eso motiva la siguiente definición:

Definición 2.2.40

Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ un conjunto cerrado. Para cada ordinal ξ, definimos

$$A^{(\xi)} = \begin{cases} (A^{\xi_-})' & \text{si } \xi \text{ tiene predecesor } \xi_- \\ \bigcap_{\lambda \in \xi} A^{\lambda} & \text{si } \xi \text{ es un ordinal límite.} \end{cases}$$

La definición anterior nos proporciona una familia *decreciente* de conjuntos cerrados indexada sobre los ordinales, en el sentido que

$$\xi_1 < \xi_2 \implies A_{\xi_2} \subseteq A_{\xi_1}.$$

Por razones de cardinalidad, existen ordinales ξ tal que $(A^{\xi})' = A^{\xi}$ (por ejemplo cualquier ordinal ξ tal que $\mathrm{card}(\xi) > \mathrm{card}(A)$).

Definición 2.2.41

(Índice Cantor-Bendixson) Definimos el índice *Cantor-Bendixson* de un conjunto cerrado A, como el mínimo ordinal λ tal que $(A^{\lambda})' = A^{\lambda}$.

Si un conjunto A no es cerrado, podemos definir el índice Cantor-Bendixson $\lambda_{A'}$ para su conjunto derivado A' (que es siempre cerrado) y asociar a A el sucesor $\lambda_{A'} + 1$ de dicho ordinal.

En el Ejemplo 2.2.37 todos los conjuntos considerados tienen índice menor o igual a 2. El siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$ nos proporciona un ejemplo ilustrativo de conjunto con índice Cantor-Bendixson igual a 3.

$$A := \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) : n, m \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\left(0, \frac{1}{m}\right) : m \in \mathbb{N}\right\} \cup \{(0,0)\}.$$

A continuación mostremos que dado cualquier ordinal numerable, existe un subconjunto de $\mathbb{R}$ cuyo índice Cantor-Bendixson es este ordinal.

Proposición 2.2.42 (Inyección isótona en $\mathbb{Q}$.) *Sea ξ cualquier ordinal numerable. Entonces para cada $a, b \in \mathbb{Q}$, con $a < b$, existe una inyección isótona*

$$\widehat{\ss} : \xi \hookrightarrow (a, b] \cap \mathbb{Q},$$

donde $(a, b] \cap \mathbb{Q}$ se considera con su orden habitual. En particular, $\mathbb{R}$ contiene subconjuntos de índice Cantor-Bendixson igual a cualquier ordinal numerable predeterminado.

DEMOSTRACIÓN: Observamos primero que si un ordinal se inyecta isotonicamente en $(a, b] \cap \mathbb{Q}$ mediante la inyección $\widehat{\ss}$ entonces se puede inyectar en cualquier otro intervalo $(a', b'] \cap \mathbb{Q}$ con $a' < b'$. En efecto, podemos suponer que a', b' son racionales (si no es el caso, tomamos un sub-intervalo con extremos racionales dentro $(a', b']$). Luego, considerando la composición de $\widehat{\ss}$ con la función afín que envía a a a' y b a b' (que es una biyección isótona entre $(a, b] \cap \mathbb{Q}$ y $(a', b'] \cap \mathbb{Q}$, obtenemos la inyección isótona deseada. Mostramos ahora que ω se inyecta isotonicamente en $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$. En efecto, la inyección deseada está dada por cualquier sucesión estrictamente creciente de racionales $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(0, 1]$ con límite igual a 1. Como consecuencia, cualquier ordinal de tipo $\omega + n$, $n \in \mathbb{N}$ se inyecta en $(0, 2] \cap \mathbb{Q}$ (y por lo tanto, en cualquier intervalo de racionales).

Luego, inyectando ω en cada uno de los intervalos $(q_i, q_{i+1}]$ definidos por la sucesión anterior, obtenemos una inyección de ω^2 en $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ (y por lo tanto en cualquier otro intervalo de racionales). Obviamente este proceso se puede repetir infinitamente, obteniendo inyecciones isótonas de ω^n en $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (Obsérvese que el conjunto obtenido como imagen de la inyección de ω^n tiene índice Cantor-Bendixson igual a $n + 1$.)

Sea $\widehat{\ss}_n : \omega^n \hookrightarrow (n, n+1] \in \mathbb{Q}$, la inyección de ω^n en el intervalo $(n, n+1] \cap \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considerando conjuntamente estas inyecciones, se define una inyección de ω^ω (como ordinal) a $(0, +\infty) \cap \mathbb{Q}$, dando lugar a un conjunto de índice Cantor-Bendixson igual a ω. Considerando una biyección creciente de $(0, +\infty)$ con $(0, 1)$ (e identificando $+\infty$ con 1) obtenemos una inyección isótona de ω^ω en $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ lo que nos permite continuar el proceso y definir conjuntos con índice Cantor-Bendixson igual a $\omega + n$, $n \in \mathbb{N}$, luego 2ω, 3ω, $\ldots$, $\omega^2, \omega^3, \ldots$ etc. $\square$

Observación 2.2.43 (ω-límites vs puntos de acumulación) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en el espacio métrico (X,d). Algunos autores utilizan el término *punto de acumulación* para referirse a un ω-límite de la sucesión (Definición 2.2.30). Sin embargo, no hay que confundir el conjunto de los ω-límites de la sucesión con el conjunto derivado de $x(\mathbb{N}) := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ que puede ser diferente (más pequeño). En efecto, la sucesión de los números reales $x_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, tiene exactamente dos ω-límites, los puntos 1 y -1 que corresponden a los límites de las sub-sucesiones de números pares e impares respectivamente pero su imagen $x(\mathbb{N}) = \{1,-1\}$, siendo conjunto finito, no tiene puntos de acumulación.

Observamos que si la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es inyectiva (es decir, $x_n \neq x_m$ para todo $n,m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$) entonces el conjunto de sus ω-límites coincide con el conjunto derivado de $x(\mathbb{N})$. Un ejemplo interesante ocurre tomando como sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cualquier enumeración de los racionales $q : \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{Q}$. Dado que $\mathrm{adh}(q(\mathbb{N})) = \mathrm{adh}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, se obtiene entonces que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una sub-sucesión $(q_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(q_{k(n)}) \to x$.

2.2.5. Conjuntos densos. Espacios separables

En esta sección introduciremos una categoría importante de espacios métricos, los espacios métricos separables. Empezamos por definir lo que es un conjunto denso.

Definición 2.2.44

(Conjunto denso) Sea (X,d) un espacio métrico. Un subconjunto D de X se dice *denso* en X, si $\overline{D} = X$.

Una propiedad importante que cumplen los conjuntos densos es la siguiente.

Proposición 2.2.45 *Sea (X,d) un espacio métrico, y $D \subseteq X$, entonces*

$$D \subseteq X \quad \text{denso} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \mathcal{U} \in \Im \setminus \{\varnothing\}, \quad D \cap \mathcal{U} \neq \varnothing.$$

Es decir, un conjunto denso "encuentra" todos los conjuntos abiertos no vacíos.

Demostración: $(\Rightarrow)$ Sea $D \subseteq X$ denso, sea $\mathcal{U} \neq \varnothing$ abierto no vacío y $x \in \mathcal{U}$. Entonces $\mathcal{U} \in \Im_x$ y $x \in \overline{D}$. Concluimos por la Proposición 2.2.17.

$(\Leftarrow)$ Sea $\mathcal{U} \in \Im$ no vacío. Si $D \cap \mathcal{U} = \varnothing$ entonces $D \subseteq X \setminus \mathcal{U}$ por lo tanto $\overline{D} \subseteq X \setminus \mathcal{U} \subsetneq X$, lo que es una contradicción. $\square$

Observación 2.2.46 Un conjunto $D \subseteq X$ es denso si y sólo si su complemento $X \setminus D$ tiene interior vacío. En $\mathbb{R}$ tanto el conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$ como su complemento, los irracionales $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, son densos en $\mathbb{R}$ (y tienen interior vacío). Si un espacio métrico X posee un conjunto denso con complemento denso, entonces X no puede tener puntos aislados. En el otro extremo, el único conjunto denso en el espacio métrico discreto es todo el espacio.

El siguiente resultado nos dice que si $X = X'$ (es decir, X no tiene puntos aislados), entonces siempre existe conjunto denso con complemento denso.

Proposición 2.2.47 (Conjunto denso con complemento denso) *Sea (X, d) un espacio métrico sin puntos aislados. Entonces existe un conjunto $D \subseteq X$ tal que D y $X \setminus D$ son densos en X.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $Y \subseteq X$ y $\varepsilon > 0$. Llamamos ε-red en Y un subconjunto de Y con la propiedad que para cada par de elementos distintos $x, y \in Y$ se tiene que $d(x, y) \geq \varepsilon$. Observamos que una ε-red no tiene puntos de acumulación y además su intersección con una bola de radio $\varepsilon/2$ no puede tener más que un elemento.

Utilizando el lema de Zorn obtenemos un conjunto $A_1 \subseteq X$ con la propiedad de ser una 1-red maximal en X. (Observamos que la maximalidad de la 1-red implica que para todo $x \in X$ existe al menos un elemento $y \in A_1$ tal que $d(x, y) < 1$.)

Ponemos $X_1 := X \setminus A_1$ y observamos que $X_1 \neq \varnothing$ (ya que X no tiene puntos aislados, por lo tanto no puede ser igual a A_1). Además el nuevo conjunto X_1 no tiene puntos aislados: en efecto, si existiera $x \in X_1 \setminus X_1'$ entonces dado que $x \in X = X'$, y en virtud de (2.31), para todo $\delta \in (0, 1/2)$ la bola $B(x_1, \delta)$ debería contener al menos dos (de hecho, infinitos) puntos de la 1-red A_1 lo que es contradictorio a la propiedad de la red.

Aplicando Zorn nuevamente, definimos una 1/2-red maximal A_2 en el conjunto X_1. Observamos que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Utilizando el mismo argumento que antes deducimos que el conjunto

$$X_2 := X_1 \setminus A_2 = X \setminus (A_1 \cup A_2)$$

no es vacío y no tiene puntos aislados (puesto que $X_1 = X_1'$).

Mediante este proceso recursivo definimos una familia disjunta $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto A_n es una $1/n$-red maximal en el conjunto

$$X_n := X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \,,$$

y además este último no es vacío y no tiene puntos aislados.

Definimos ahora los siguientes conjuntos disjuntos

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{2n} \quad \& \quad T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{2n+1}$$

y mostramos que son densos en X. En efecto, sea $x \in X$ arbitrario y $\varepsilon > 0$. Vamos a mostrar primero que $D \cap B(x,\varepsilon) \neq \varnothing$. Supongamos lo contrario y tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon$. Observamos que para cada $m \in \{1,\dots,2n\}$ el conjunto $B(x,1/4n) \cap A_m$ es singleton o vacío. Dado que $x \in X' = X$, el conjunto $B(x,1/4n)$ contiene infinitos elementos de X, y por lo tanto existe $\bar{x} \in B(x,1/4n) \setminus \bigcup_{i\leq 2n} A_i$. Se deduce que

$$d(\bar{x},y) \;\geq\; d(y,x) - d(x,\bar{x}) \;>\; \varepsilon - 1/4n \;>\; 1/2n \text{ para todo } y \in A_{2n},$$

por lo tanto $A_{2n} \cup \{\bar{x}\}$ es una $(1/2n)$-red que extiende estrictamente la $(1/2n)$-red maximal A_{2n}, lo que es una contradicción. Se establece así que el conjunto D es denso en X. De manera similar se demuestra que T es denso en X por tanto $X \setminus D$ (que contiene T) también es denso. $\square$

El resultado anterior se puede generalizar de la siguiente manera.

Proposición 2.2.48 *En cada espacio métrico (X,d) existe un conjunto $D \subseteq X$ denso con complemento denso en X'. (El conjunto X' puede ser vacío.)*

DEMOSTRACIÓN: Sea $I := X \setminus X'$ el conjunto de los puntos aislados de X. Vamos a construir el conjunto D siguiendo los pasos de la demostración de la Proposición 2.2.47. Primero observamos que si A_n es una $(1/n)$-red de X, $n \in \mathbb{N}$, entonces cualquier unión finita A de conjuntos de la familia $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ satisface $A' = \varnothing$ y el conjunto de los puntos aislados de $X \setminus A$ es exactamente $I \setminus A$. En efecto, sea $A = \cup_{j=1}^{k} A_{i_j}$, $\bar{x} \in X$ arbitrario y $m = \max\{i_1,\dots,i_k\}$. Si $r < 1/2m$, entonces $B(\bar{x},r)$ contiene a lo más un elemento de cada A_{i_j}. Tomando $\delta < r$ suficientemente pequeño, obtenemos $B(\bar{x},\delta) \cap A \subseteq \{\bar{x}\}$.

Sea A_1 una 1-red maximal en X. Si $X_1 := X \setminus A_1 = \varnothing$, entonces $X = A_1 = I$ y tomamos $D = A_1 = I$. En caso contrario, $X_1 \neq \varnothing$ y $X_1 \setminus X_1' = I \setminus A_1$. Tomamos A_2 una $(1/2)$-red maximal en X_1 y definimos $X_2 := X_1 \setminus A_2 = X \setminus (A_1 \cup A_2)$. Si $X_2 = \varnothing$, entonces tomamos $D = A_1 \cup A_2 = I$. En caso contrario, continuamos el proceso, tomando A_3 una $(1/3)$-red maximal en X_2. De forma inductiva, o bien existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$X_n := X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \varnothing \qquad \Longrightarrow \qquad X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = I$$

y tomamos $D = I$ (ya que $X' = \varnothing$), o bien X_n no es vacío y tomamos una $(\frac{1}{n+1})$-red maximal en X_n. (Este segundo caso ocurre siempre que $X' \neq \varnothing$.)

Definamos ahora los siguientes conjuntos disjuntos

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{2n} \cup I \qquad \& \qquad T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{2n+1} \setminus I.$$

Es fácil comprobar que D es denso en X y $T \subseteq X \setminus D$ es denso en $X' := X \setminus I$. En efecto, si $x \in X \setminus D$, entonces $x \in X'$ y el argumento es similar al argumento empleado en la última parte de la Proposición 2.2.47. $\square$

Finalizaremos esta sección con la siguiente definición.

Definición 2.2.49

(Espacio separable) Un espacio métrico (X, d) se dice *separable*, si existe un conjunto $D \subseteq X$ denso y numerable.

Cada espacio métrico numerable es separable (tomando como conjunto denso el mismo). El interés de la noción introducida por la Definición 2.2.49 es justamente cuando el espacio métrico no es numerable. La separabilidad del espacio nos permite entonces estudiar propiedades del espacio mediante procesos iterativos.

Observación 2.2.50 Sea (X, d) el espacio métrico discreto (Ejemplo 2.1.15(i)). Entonces X es separable si y sólo si $\mathrm{card}(X) \leq \aleph_0$.

Ejemplo 2.2.51 (i). Para todo $d \in N$ el espacio normado $\mathbb{R}^d$ (con cualquier norma, ya que definen todas los mismos abiertos) es separable: en efecto, el conjunto $D = \mathbb{Q}^d$ es numerable y $\overline{\mathbb{Q}^d} = \mathbb{R}^d$.

(ii). $(c_{00}(\mathbb{N}), ||\cdot||_\infty)$ El espacio de sucesiones eventualmente nulas (es decir, $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que existe $N \in \mathbb{N}$ con $x_n = 0$ para todo $n \geq N$) con la norma-infinito es separable. Efectivamente consideramos el conjunto

$$D = c_{00}(\mathbb{N}) \cap \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \tag{2.33}$$

de las sucesiones racionales eventualmente nulas. Dicho conjunto es numerable (se puede identificar una unión numerable de conjuntos numerables $\mathbb{Q}^{<\omega} := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}^k$).

Mostramos que D es denso: Sea $x \in c_{00}(\mathbb{N})$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0$ para todo $n > N$. Luego, para $i \in \{1, \ldots, N\}$ elegimos $q_i \in \mathbb{Q}$ tal que $|x_i - q_i| < \varepsilon$, y definimos $q \in D$ como la sucesión cuyos N-primeros términos son los elementos $q_1, \ldots, q_N$ y luego $q_n = 0$ para $n > N+1$. Es inmediato comprobar que $||x-q||_\infty = \max_{i\leq N} |x_i - q_i| < \varepsilon$.

(iii). El espacio $\mathbb{R}[X]$ de los polinomios reales de una variable con la norma $||\cdot||_\infty$ se puede identificar de forma natural con $c_{00}(\mathbb{N})$, por lo tanto es separable. El conjunto numerable denso, isomorfo al conjunto D definido por (2.33) es en este caso el subespacio $\mathbb{Q}[X]$ de los polinomios con coeficientes racionales.

(iv). Los espacios $(\ell^p, ||\cdot||_p)$, $1 \leq p < \infty$ son separables. En efecto, consideramos el mismo conjunto D dado por (2.33) de las sucesiones racionales eventualmente nulas. Mostramos que $(\ell^1, ||\cdot||_1)$ es separable. En efecto, sea $x \in \ell^1$ (sucesión absolutamente sumable) y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n>N} |x_i| < \varepsilon/2$. Para $i \in \{1, \ldots, N\}$ elegimos $q_i \in \mathbb{Q}$ tal que $|x_i - q_i| < \varepsilon/2N$ y consideramos la sucesión $q \in D$ cuyos N primeros términos son los $q_1, \ldots, q_N$ y luego constante 0. Es inmediato comprobar que $||x - q||_1 < \varepsilon$. Dejamos como ejercicio tratar los casos $(c_0(\mathbb{N}), ||\cdot||_\infty)$ y $(\ell^p, ||\cdot||_p)$, $p \in (1, \infty)$.

(v). El espacio $(\mathcal{C}([0,1]), ||\cdot||_\infty)$ de las funciones continuas sobre $[0,1]$ es un espacio normado separable. Este resultado es esencialmente una consecuencia del *teorema de Weierstrass* que dice que cada función continua es límite uniforme de polinomios, es decir, el espacio $\mathbb{R}[X]$ de los polinomios definidos sobre $[0,1]$ es $||\cdot||_\infty$-denso en $\mathcal{C}([0,1])$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe polinomio $p \in \mathbb{R}[X]$ tal que $||f - p||_\infty < \varepsilon/2$. Luego por (ii), existe $q \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $||p - q||_\infty < \varepsilon/2$. Se obtiene así que el espacio $\mathbb{Q}[X]$ de los polinomios con coeficientes racionales es (numerable y) denso.

(vi). El espacio $(\ell^\infty(\mathbb{N}), ||\cdot||_\infty)$ es el ejemplo típico de un espacio *no separable*. En efecto, sea $\mathcal{M} := \{-1, 1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \ell^\infty$ el conjunto de todas las sucesiones con valores -1 y 1. Dicho conjunto tiene cardinalidad c (la cardinalidad del continuo). Observamos que si $x, y \in \mathcal{M}$ y $x \neq y$ entonces $||x - y||_\infty = 2$, por lo tanto $\{B(x,1) : x \in \mathcal{M}\}$ define una familia no numerable de bolas abiertas y disjuntas. Dado que cada conjunto denso debe tener al menos un elemento en cada bola (lo que compromete su cardinalidad) se deduce que el espacio no es separable.

2.2.6. Subespacios métricos

Sea (X, d) un espacio métrico. Considerando subconjuntos de X y restringiendo adecuadamente la distancia, podemos obtener otros espacios métricos a partir del espacio X.

Definición 2.2.52

(Subespacio métrico) Sea $Y \subseteq X$ un conjunto no vacío. Entonces $(Y, d|_{Y \times Y})$ es un espacio métrico que llamaremos *subespacio métrico* de X.

Ejemplo 2.2.53 Definimos $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ el espacio de las funciones continuas de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$ con la distancia d_∞ dada por la norma $||\cdot||_\infty$ (véase Ejemplo 2.1.8 (ii)). Este conjunto, con la distancia restringida al espacio, es un subespacio métrico del espacio $\ell^\infty([0,1])$.

Es muy importante saber en que contexto se habla de un conjunto abierto en un espacio métrico. Cuando (X,d) es un espacio métrico, e $Y \subseteq X$, entonces el conjunto Y es siempre abierto y cerrado en su propia topología $\Im_Y$, mientras que se elige de forma arbitraria dentro X. Otro ejemplo más concreto sería considerar el espacio métrico $X = \mathbb{R}$ con la distancia habitual y su subespacio $Y = [0,1]$. Notamos que el conjunto $[0, \frac{1}{2})$ coincide (en el subespacio Y) con la bola $B_Y(0, 1/2)$ y por lo tanto es abierto en Y, pero no es abierto en X. En otras palabras, si un conjunto $A \subseteq Y$ es abierto (visto dentro el espacio Y), este conjunto no es necesariamente abierto en X. Para enfatizar esta discrepancia hablaremos de conjuntos *relativamente abiertos* (respectivamente, *relativamente cerrados*) *con respecto a* Y.

Procedemos a caracterizar los conjuntos relativamente abiertos (respectivamente, relativamente cerrados) de un subespacio métrico Y de X. Primero, para todo $y \in Y$ y $r > 0$ se tiene que

$$B_Y(y,r) = \{x \in Y : d(x,y) < r\} = B(y,r) \cap Y.$$

Proposición 2.2.54 (Caracterización de la topología relativa) *Sea* (X,d) *un espacio métrico, e* $Y \subseteq X$.

(i). Un conjunto $A \subseteq Y$ *es un abierto relativo a* Y *si y sólo si existe un conjunto abierto* $\mathcal{U} \subseteq X$ *tal que* $A = \mathcal{U} \cap Y$.

(ii). Un conjunto $B \subseteq Y$ *es un cerrado relativo a* Y *si y sólo si existe un conjunto cerrado* $F \subseteq X$ *tal que* $B = F \cap Y$.

DEMOSTRACIÓN: (i). Sea $A \subseteq Y$ un abierto relativo a Y, es decir, para cada $y \in A$, existe $r_y > 0$ tal que $B_Y(y, r_y) = B(y, r_y) \cap Y \subseteq A$. Consideremos el conjunto $\mathcal{U} = \bigcup_{y \in A} B(y, r_y) \in \Im_X$. Es fácil ver que $A = \mathcal{U} \cap Y$.

Consideremos ahora el conjunto $A = \mathcal{U} \cap Y$, con $\mathcal{U} \in \Im_X$. Vamos a mostrar que $A \in \Im_Y$. Sea $y \in A$. En particular $x \in \mathcal{U}$, y $\mathcal{U}$ es abierto en X, por lo tanto existe $r > 0$ tal que $B(y,r) \subseteq \mathcal{U}$. Luego $B(y,r) \cap Y = B_Y(y,r) \subseteq \mathcal{U} \cap Y = A$ por lo que A es abierto relativo a Y.

(ii). Sea $B \subseteq Y$ un conjunto cerrado relativo a Y. Entonces existe $\mathcal{U} \in \Im_X$ tal que $Y \setminus B = Y \cap \mathcal{U}$. Tomando complementos en X se tiene que $(X \setminus Y) \cup B = (X \setminus Y) \cup (X \setminus \mathcal{U})$. Tomando ahora intersección con Y en ambos lados de la igualdad e introduciendo el conjunto $F := X \setminus \mathcal{U}$ (cerrado en X) obtenemos $B = Y \cap F$.

Sea $B = Y \cap F$, con F cerrado en X. Sea $\mathcal{U} \in \Im_X$ el complemento de F en X. Entonces B se escribe de forma equivalente como

$$B = Y \cap (X \setminus \mathcal{U}) = Y \setminus \mathcal{U} = Y \cap (X \setminus \mathcal{U}) = Y \cap (Y \setminus \mathcal{U}),$$

de donde se deduce que $Y \setminus B = Y \cap \mathcal{U}$ es abierto relativo en Y. □

2.3. Continuidad de funciones

En cursos anteriores de cálculo se define el concepto de *continuidad* para funciones entre espacios normados. En esta sección, extendemos dicho concepto para funciones entre espacios métricos.

DEFINICIÓN 2.3.1

(Función continua) Sean (X, d), (Y, ρ) dos espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ se dice *continua* en x_0, si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)\ \left(f(B_d(x_0, \delta)) \subseteq B_\rho(f(x_0), \varepsilon)\right). \tag{2.34}$$

La siguiente proposición nos dice que la continuidad de una función entre espacios métricos se puede caracterizar mediante la convergencia de sucesiones.

Proposición 2.3.2 (Continuidad vs continuidad secuencial) *Sean (X, d) e (Y, ρ) dos espacios métricos, $f : X \to Y$ y $x_0 \in X$. Los siguientes son equivalentes:*

(i) f es continua en x_0 ;

(ii) f es secuencialmente continua en x_0,
es decir, para todo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ se tiene que:

$$\lim_n x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

DEMOSTRACIÓN: (i)⇒(ii). Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $(x_n) \to x_0$ y sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que $f(B_d(x_0, \delta)) \subseteq B_\rho(f(x_0), \varepsilon)$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $x_n \in B_d(x_0, \delta)$. Entonces, para todo $n \geq n_0$ también tendremos que $f(x_n) \in B_\rho(f(x_0), \varepsilon)$, lo que muestra que la sucesión $(f(x_n))_n$ converge a $f(x_0)$.

(ii)⇒(i). Supongamos por contradicción que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\delta_n = 1/n$ se tiene que $f(B_d(x_0, \delta_n)) \nsubseteq B_\rho(f(x_0, \varepsilon_0))$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in$

$B_d(x_0, \delta_n)$ con $f(x_n) \notin B(f(x_0), \varepsilon_0)$ (*c.f.* Axioma de Elección). Se obtiene así una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $d(x_0, x_n) \leq 1/n \to 0$, pero la sucesión $f(x_n)$ no converge a $f(x_0)$, ya que $\{f(x_n)\}_n \subseteq Y \setminus B(f(x_0), \varepsilon)$, lo que es una contradicción. □

Veremos ahora que la continuidad de una función se puede definir en términos puramente topológicos, sin referencia a nociones métricas, tales la distancia o las bolas. Utilizaremos la notación de (2.21).

Proposición 2.3.3 (Definición topológica de la continuidad) *Sean (X, d) e (Y, ρ) dos espacios métricos, $f : X \to Y$ y $x_0 \in X$. Los siguientes son equivalentes:*

(i) f es continua en x_0 ;

(ii) para todo $\mathcal{U} \in \Im_{f(x_0)}$, existe $\mathcal{V} \in \Im_{x_0}$, tal que $f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{U}$;

DEMOSTRACIÓN: (i)⇒(ii). Sea $\mathcal{U} \in \Im_{f(x_0)}$, es decir $\mathcal{U}$ es abierto y $f(x_0) \in \mathcal{U}$. Por ser abierto, existe $\varepsilon > 0$, tal que $B_\rho(f(x_0), \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$. Por la definición de continuidad, existe $\delta > 0$ tal que $f(B_d(x_0, \delta)) \subseteq B_\rho(f(x_0), \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$. Tomando $\mathcal{V} = B_d(x_0, \delta)$ se concluye.

(ii)⇒(i). Sea $\varepsilon > 0$. Tomando $\mathcal{U} = B_\rho(f(x_0), \varepsilon) \in \Im_{f(x_0)}$, existe $\mathcal{V} \in \Im_x$ tal que $f(\mathcal{V}) \subseteq B_\rho(f(x_0), \varepsilon)$. Como $\mathcal{V}$ es abierto, existe $\delta > 0$, tal que $B_d(x_0, \delta) \subseteq \mathcal{V}$. Concluimos que $f(B_d(x_0, \delta)) \subseteq B_\rho(f(x_0), d)$. □

El siguiente resultado se demuestra fácilmente usando la Proposición 2.3.2 (continuidad secuencial). Omitiremos la demostración.

Corolario 2.3.4 (Cálculo con funciones continuas) (i). *Sea (X_1, d_2), (X_2, d_2), (X_3, d_3) espacios métricos. Supongamos que la función $f : X_1 \mapsto X_2$ es continua en $x_0 \in X_1$ y que la función $g : X_2 \mapsto X_3$ es continua en $f(x_0)$. Entonces la composición $g \circ f : X_1 \mapsto X_3$ es continua en x_0.*
(ii). *Sea (X, d) un espacio métrico y $f, g : (X, d) \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $x_0 \in X$. Entonces las funciones $f + g$ y luego $f \cdot g$, son continuas en x_0. Si $g(x_0) \neq 0$, entonces la función f/g está bien definida en un entorno de x_0 y también es continua en x_0.*

El siguiente resultado nos entrega una caracterización puramente topológica de la continuidad de una función en cada punto.

Proposición 2.3.5 (Caracterización topológica de la continuidad) *Sean (X, d), (Y, ρ) dos espacios métricos y $f : X \mapsto Y$. Los siguientes son equivalentes:*

(i) f es continua.

(ii) para todo $\mathcal{U} \in \Im_Y$ *se tiene que* $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \Im_X$.

(iii) para todo K *cerrado en* Y *se tiene que* $f^{-1}(K)$ *es cerrado en* X.

Demostración: (i)$\Rightarrow$(ii). Sea $\mathcal{U} \in \Im_Y$. Si $f^{-1}(\mathcal{U})$ es vacío, entonces es abierto. Sino, sea $x_0 \in f^{-1}(\mathcal{U})$ (elemento arbitrario). Entonces $f(x_0) \in \mathcal{U}$, y por ser $\mathcal{U}$ abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\rho(f(x_0), \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$. Usando la continuidad de f, obtenemos $\delta > 0$ tal que $f(B_d(x_0), \delta) \subseteq \mathcal{U}$. Lo anterior implica $B_d(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(\mathcal{U})$. Como x_0 se tomó de forma arbitraria, se deduce que $f^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto.

(ii)$\Rightarrow$(i). Sea $x_0 \in X$, sea $\mathcal{U} \in \Im_Y$ tal que $f(x_0) \in \mathcal{U}$. Entonces $\mathcal{V} := f^{-1}(\mathcal{U})$ es un abierto que contiene x_0, luego $f(\mathcal{V}) = f(f^{-1}(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$. Se concluye por la Proposición 2.3.3.

(ii)$\Leftrightarrow$(iii). Se obtiene tomando complementos: $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$. $\square$

Observamos en continuación que la anterior caracterización proporciona una demostración alternativa de la continuidad de la función composición de dos funciones que son continuas en cada punto.

Corolario 2.3.6 (Composición) *Sean* (X_1, d_1), (X_2, d_2), (X_3, d_3) *espacios métricos y* $f : X_1 \mapsto X_2$, $g : X_2 \mapsto X_3$ *funciones continuas. Entonces* $g \circ f$ *es continua.*

Demostración: Sea $\mathcal{U} \in \Im_{X_3}$. Entonces $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{U}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{U}))$ es un abierto en X_1, ya que $g^{-1}(\mathcal{U})$ es un abierto en X_2 (g es continua) y $f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{U}))$ es un abierto en X_1 (f es continua). $\square$

2.3.1. Distancia a un conjunto – Lema de Urysohn

Una subclase importante de funciones continuas son las funciones *Lipschitz* continuas.

Definición 2.3.7

(Continuidad Lipschitz) Sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos. Una función $f : X \mapsto Y$ se dice Lipschitz continua (o simplemente Lipschitz), si existe $L > 0$ tal que para todo $x_1, x_2 \in X$ se tiene que

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \le L\, d(x_1, x_2).$$

Es fácil comprobar que una función Lispchitz es continua en todo punto. El reciproco no es cierto: las funciones $t \mapsto t^2$ y $t \mapsto \sqrt{|t|}$ definidas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ son continuas pero no son Lipschitz continuas.

Observación 2.3.8 La continuidad Lipschitz es una noción métrica, haciendo referencia explicita a las distancias de los espacios métricos involucrados.

El siguiente resultado nos proporciona una clase importante de funciones (Lipschitz) continuas en un espacio métrico (X, d), vinculadas con su distancia.

Proposición 2.3.9 (Distancia a un conjunto) *Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$ no vacío. Entonces la función*

$$f(x) = \mathrm{dist}(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a),$$

es Lipschitz continua. (Dicha función se denota a veces por $\mathrm{dist}_A(\cdot)$.)

DEMOSTRACIÓN: Sean $x, y \in X$ y $a \in A$. Se deduce de la desigualdad triangular (tomando el ínfimo para todo $a \in A$) que

$$f(x) = \inf_{a \in A} d(x, a) \leq \inf_{a \in A} \{ d(x, y) + d(y, a) \} = d(x, y) + f(y),$$

es decir,

$$f(x) - f(y) \leq d(x, y).$$

Por simetría, intercambiando x con y, concluimos que $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$. $\square$

Observación 2.3.10 Observamos que para todo conjunto $A \subseteq X$ no vacío, se tiene que

$$f(x) := \mathrm{dist}_{\mathrm{adh}(A)}(x) = \mathrm{dist}_A(x), \quad \text{para todo } x \in X, \tag{2.35}$$

luego

$$\mathrm{adh}(A) = f^{-1}(0).$$

Una consecuencia de la Proposición 2.3.9 es que para todo $x_0 \in X$, la función *distancia a* x_0 es continua en X. Si X es un espacio vectorial y la distancia proviene de una norma (*c.f.* Observación 2.1), se deduce inmediatamente lo siguiente:

Corolario 2.3.11 (Continuidad de la norma) *Sea (E, N) un espacio normado. Entonces la función norma $N : E \mapsto \mathbb{R}_+$ es una función continua.*

Otra consecuencia interesante de la Proposición 2.3.9 es el siguiente resultado que garantiza la suficiencia de abiertos para separar conjuntos cerrados disjuntos en un espacio métrico.

Corolario 2.3.12 (Lema de Urysohn – Versión métrica) *Sean $A, B \subseteq X$ cerrados, con $A \cap B = \varnothing$. Entonces existe una función continua $f : X \mapsto [0,1]$ tal que*

$$f^{-1}(\{0\}) = A \qquad \text{y} \qquad f^{-1}(\{1\}) = B.$$

En particular, los conjuntos

$$\mathcal{U} := f^{-1}([0,1/3)) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{V} := f^{-1}((2/3,1])$$

son abiertos, disjuntos y satisfacen $A \subseteq \mathcal{U}$ y $B \subseteq \mathcal{V}$.

DEMOSTRACIÓN: Consideramos la función

$$\begin{cases} f : X \mapsto [0,1] \\ f(x) = \dfrac{d(x,A)}{d(x,A) + d(y,B)}. \end{cases}$$

Como A, B son cerrados y disjuntos, es fácil ver que el denominador no se puede anular, por lo tanto f está bien definida con valores entre $[0,1]$, con $A = f^{-1}(\{0\})$ y $B = f^{-1}(\{1\})$. Combinando la Proposición 2.3.9 con la Proposición 2.3.4 obtenemos que f es continua. Concluimos por la Proposición 2.3.5 (ii). □

Observación 2.3.13 (Axioma de separabilidad T_4) El Corolario 2.3.12 establece que si A, B son cerrados disjuntos en un espacio métrico (X,d) entonces existen abiertos $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \Im_X$ tales que:

$$A \subseteq \mathcal{U}_1, \quad B \subseteq \mathcal{U}_2 \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \varnothing\,.$$

Veremos más adelante que esta propiedad se conoce como el axioma de separación T_4 para el espacio topológico correspondiente $(X, \Im)$. El caso particular donde los conjuntos cerrados son singletons (es decir, $A = \{x\}$ y $B = \{y\}$, donde $x, y \in X$ con $x \neq y$, corresponde a la propiedad de Hausdorff (véase Observación 2.2.7), also conocida como axioma de separación T_2.

2.3.2. Conjuntos G_δ – Puntos de continuidad.

Empezamos con la siguiente definición.

Definición 2.3.14

(Conjuntos G_δ y F_σ) Sea (X,d) un espacio metrico.

– Un conjunto $G \subseteq X$ se dice G_δ si se puede escribir como *intersección numerable de abiertos*, es decir, si existe $\{(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}\} \subseteq \Im$ tal que

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n .$$

– Un conjunto $B \subseteq X$ se dice F_σ si se puede escribir como *unión numerable de cerrados*, es decir, si existe una sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos cerrados, tal que

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n .$$

Observación 2.3.15 (Abiertos/cerrados vs $\boldsymbol{G_\delta/F_\sigma}$) Los conjuntos G_δ y F_σ son complementarios, es decir, el complementario en X de un conjunto G_δ es F_σ, y vice-versa. Luego, es obvio de la Definición 2.3.14 que cada conjunto abierto es en particular G_δ y que cada cerrado es F_σ. Veremos ahora que cada conjunto cerrado es también G_δ (y por lo tanto, cada abierto es también F_σ). En efecto, si $K \subseteq X$ es un cerrado, entonces

$$K = \mathrm{dist}_K^{-1}(\{0\}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{dist}_K^{-1}([0,1/n)),$$

y se concluye por la Proposición 2.3.9.

A continuación veremos unos resultados interesantes que conectan la continuidad de una función, con los conjuntos G_δ de un espacio métrico.

Proposición 2.3.16 (Conjunto de puntos de continuidad.) *Sea (X,d), (Y,ρ) dos espacios métricos y sea $f : X \mapsto Y$ una función arbitraria. Entonces el conjunto de puntos de X en que la función f es continua es un conjunto G_δ que contiene todos los puntos aislados de X.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto abierto

$$\mathcal{U}_n = \bigcup \left\{ D : D \text{ es abierto } \text{ y } \mathrm{diam}(f(D)) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Sea $\mathcal{C}_f$ el conjunto de los puntos de continuidad de f. Mostremos que

$$\mathcal{C}_f = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n.$$

Sea $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ y $\varepsilon > 0$. Tomamos $n \in \mathbb{N}$ con $1/n < \varepsilon$. Dado que $x \in \mathcal{U}_n$, existe un abierto $D \in \Im_x$ con $\mathrm{diam}(f(D)) < 1/n$. Eso es, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq D$, por lo tanto para cada $y \in B(x,r)$ se tiene que $\rho(f(x), f(y)) < 1/n < \varepsilon$, de donde se concluye que f es continua en x, es decir, $x \in \mathcal{C}_f$.

Sea ahora $x \in \mathcal{C}_f$. Entonces f es continua en x y para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $r_n > 0$ tal que para todo $y \in B(x, r_n)$ se tiene que $d(f(x), f(y)) < 1/2n$. Tomando $D_n = B(x, r_n)$ se tiene que $\mathrm{diam}(f(D)) < 1/n$ y por lo tanto $x \in D \subseteq \mathcal{U}_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se deduce inmediatamente que $\mathcal{C}_f$ es un conjunto G_δ. Si $x \in X$ es un punto aislado de X entonces existe $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) = \{x\}$. Es obvio que $\mathrm{diam}(f(B(x,\delta)) = 0$ y por lo tanto $B(x,\delta) \in \mathcal{U}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica $x \in \mathcal{C}_f$. □

El recíproco de la Proposición 2.3.16 también es cierto y está dado por la siguiente proposición. Se obtiene así una caracterización de los conjuntos G_δ de un espacio métrico X que contienen todos los puntos aislados: son exactamente aquellos conjuntos que son puntos de continuidad de una función $f \in \mathbb{R}^X$.

Proposición 2.3.17 (G_δ que contienen todos los puntos aislados) *Sea (X,d) un espacio métrico y $G \subseteq X$ un conjunto G_δ que contiene todos los puntos aislados de X. Entonces existe una función $f : X \to \mathbb{R}$ que es continua exactamente en G.*

DEMOSTRACIÓN: Sea G un conjunto G_δ tal que $X \setminus X' \subseteq G \subseteq X$. Entonces $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ (con $\mathcal{U}_n$ abierto). Definimos $F_n = X \setminus \mathcal{U}_n$ (cerrado) de forma que $X \setminus G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, ponemos

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in F_n \\ 0, & \text{si } x \notin F_n\,, \end{cases}$$

y definimos la función

$$\begin{cases} g : X \mapsto \mathbb{R} \\ g(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\delta_n(x)}{2^n}. \end{cases}$$

Sea $D \subseteq X$ denso en X con complemento $X \setminus D$ denso en X' (*c.f.* Proposición 2.2.48).

Definimos la función
$$e(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in D \\ -1, & \text{si } x \in X \setminus D\,. \end{cases}$$
La función deseada es
$$f(x) = e(x) \cdot g(x).$$
Es fácil ver que
$$f(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in G.$$
– Mostramos que f es continua en cada $x \in G$.
Sea $x \in G$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Sea $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i>k} 1/2^i < \varepsilon$ y sea $\mathcal{U} := \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{U}_i \in \Im_x$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $x_n \in \mathcal{U}$. En otras palabras, $\delta_i(x_n) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ y por lo tanto $|f(x_n)| < \varepsilon$ y f es continua en x.
– Mostramos ahora que f es discontinua en $X \setminus G$.
Si $x \in X \setminus G \subseteq X'$, entonces $g(x) > 0$ y $|f(x)| \neq 0$. Como D y $X \setminus D$ son densos en $X \setminus G$, existen sucesiones $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ y $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \setminus D$ tales que $(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ y $(z_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Pero $f(y_n) > 0$ y $f(z_n) < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que f no es continua en x. $\square$

2.4. Espacios Métricos Completos

Mientras que cada sucesión convergente en un espacio métrico (X, d) es también una sucesión de Cauchy, el recíproco por lo general no es cierto como muestran los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.4.1 (i). $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. Consideramos el conjunto de los números racionales equipado con la distancia habitual y una sucesión $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ de racionales que converge al número real $\sqrt{2}$. Entonces, dicha sucesión es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$, pero no converge en el espacio $\mathbb{Q}$.

(ii). $(c_{00}(\mathbb{N}), ||\cdot||_\infty)$. Consideramos el espacio normado de las sucesiones eventualmente nulas, es decir, $c_{00}(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : x_n = 0\}$, con la distancia
$$d_\infty(x, y) = \max_{i\in\mathbb{N}} |x_i - y_i|\,.$$
Consideremos en c_{00} la siguiente sucesión:
$$x^1 = (1, 0, 0, 0, \ldots), \quad x^2 = (1, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots), \quad x^3 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, \ldots) \quad \ldots$$

Mostramos que esta sucesión es de Cauchy, pero no converge en $c_{00}(\mathbb{N})$. En efecto, sean $n, m \in \mathbb{N}$, con $m > n$. Entonces

$$d_\infty(x^m, x^n) = \max_{i\in\mathbb{N}} |x_i^m - x_i^n| = \frac{1}{n+1}.$$

Se concluye inmediatamente que la sucesión $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Mostramos que no es convergente en $c_{00}(\mathbb{N})$. Sea $x \in c_{00}(\mathbb{N})$ arbitrario. Entonces existe $i_0 \in \mathbb{N}$, tal que para cada $i \geq i_0$, se tiene que $x_i = 0$. Sea $\varepsilon < 1/i_0$ y supongamos hacia contradicción que $(x^n) \to x$. Entonces existe $n_0, \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $d(x^n, x) < \varepsilon.$. Considerando $n \geq \max\{n_0, i_0\}$, obtenemos el elemento

$$x^n = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots)$$

y por lo tanto

$$d_\infty(x^n, x) = \max_i |x_i^n - x_i| \geq \frac{1}{i_0} > \varepsilon,$$

de donde concluimos que la sucesión $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no puede converger a $x \in c_{00}(\mathbb{N})$. □

2.4.1. Definición y ejemplos

Introducimos a continuación la siguiente definición que caracteriza los espacios para los cuales las sucesiones de Cauchy coinciden con las sucesiones convergentes.

DEFINICIÓN 2.4.2

(Espacio métrico completo) Un espacio métrico (X, d) se dice *completo* si cada sucesión de Cauchy converge.

La siguiente proposición caracteriza los subconjuntos de un espacio métrico completo que son completos como subespacios métricos con la distancia inducida (véase Definición 2.2.52). La demostración es inmediata y se omitirá.

Proposición 2.4.3 (Caracterización de los subespacios completos) *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $K \subseteq X$. Los siguientes son equivalentes:*

(i) K es cerrado en X

(ii) $(K, d|_{K\times K})$ es completo.

Ejemplo 2.4.4 (Espacios métricos completos, espacios de Banach) Presentamos a continuación unos ejemplos de espacios métricos completos. Mencionamos que si un espacio normado es completo (como espacio métrico), entonces se dice *espacio de Banach*.

(i) (Espacio discreto) El espacio métrico discreto (véase Ejemplo 2.1.15(i)) es un espacio completo. En efecto, una sucesión es de Cauchy (respectivamente, convergente) si y solo si es una sucesión eventualmente constante.

(ii) $\ell^\infty(\Gamma, Y)$. Sea (Y, d) un espacio métrico completo y $\Gamma \neq \varnothing$ un conjunto cualquiera. Definimos

$$\ell^\infty(\Gamma, Y) = \{f : \Gamma \to Y \ \mid \ \mathrm{diam}(f(\Gamma)) < +\infty\},$$

es decir, el conjunto de las funciones acotadas de Γ a Y. A este conjunto le podemos definir la siguiente distancia

$$\widehat{d}_\infty(f, g) \ = \ \sup_{t\in\Gamma} d(f(t), g(t)).$$

Se tiene entonces que $(\ell^\infty(\Gamma, Y), \widehat{d})$ es un espacio métrico completo.

Demostración: De manera similar al Ejemplo 2.1.8(i), se demuestra fácilmente que $\widehat{d}_\infty$ es una distancia en $\ell^\infty(\Gamma, Y)$.

Mostramos ahora que $(\ell^\infty(\Gamma, Y), \widehat{d}_\infty)$ es un espacio completo: Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^\infty(\Gamma, Y)$ una sucesión de Cauchy. Para todo $t \in \Gamma$ se deduce $d(f_n(t), f_m(t)) \leq \widehat{d}_\infty(f_n, f_m)$, por lo tanto concluimos que $\{f_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y. Como Y es un espacio completo, para todo $t \in \Gamma$ existe $y(t) \in Y$ tal que $(f_n(t)) \to y(t)$. Se define así una función $f : \Gamma \to Y$ con $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$.

Mostramos que f es acotada. Sea $\varepsilon = 1$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \leq N$, se tiene que $\widehat{d}_\infty(f_n, f_m) < 1$. Entonces para todo $n \leq N$, se tiene $\widehat{d}_\infty(f_n, f_N) < 1$ y gracias a la desigualdad triangular

$$\mathrm{diam}(f_n(\Gamma)) \leq \mathrm{diam}(f_N(\Gamma)) + 2.$$

Se deduce fácilmente que $\mathrm{diam}(f(\Gamma)) < \infty$, es decir, $f \in \ell^\infty(\Gamma, Y))$.

Mostramos por último que $f_n \xrightarrow[\widehat{d}_\infty]{} f$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$\forall n, m \geq n_0, \ \forall t \in \Gamma, \ d(f_n(t), f_m(t)) \leq \widehat{d}(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

Hacemos tender $m \to \infty$, de donde obtenemos que para todo $t \in \Gamma$ y todo $n \geq n_0$ $\widehat{d}(f_n, f) \leq \varepsilon$, por lo que concluimos que $\lim_{n\to\infty} \widehat{d}_\infty(f_n, f) = 0$. □

En el ejemplo anterior, si el espacio completo (Y, d) es un espacio normado (por lo tanto, Banach), entonces $\ell^\infty(\Gamma, Y)$ también es un espacio de Banach. En particular, tomando $Y = \mathbb{R}$ obtenemos un *esquema de ejemplos* de espacios de Banach, que detallamos a continuación:

(iii) $(\ell^\infty(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$ (véase Ejemplo 2.1.8(I)). Es el espacio de Banach $\ell^\infty(\Gamma, \mathbb{R})$ de las funciones acotadas de un conjunto $\Gamma \neq \varnothing$ (sin estructura) a $\mathbb{R}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$, que también anotamos de manera más simple por $\ell^\infty(\Gamma)$.
(Caso particular del (ii) tomando $T = \mathbb{R}$.)

(iv) $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$. El espacio de Banach $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (o simplemente $\ell^\infty(\mathbb{N})$ o incluso ℓ^∞) de sucesiones acotadas en $\mathbb{R}$

$$\ell^\infty := \{x = (x_n)_n : \sup_{n\to\infty} |x_n| < +\infty\}$$

es completo con la métrica definida por la norma $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\to\infty} |x_n|$.
(Caso particular del (iii) tomando $\Gamma = \mathbb{N}$.)

(v) $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ El espacio de dimension finita $\mathbb{R}^d$ es un espacio de Banach.
(Caso particular del (iii) tomando $\Gamma = \{1, \ldots, d\}$.)

Veremos más adelante que $\mathbb{R}^d$ es completo bajo cualquier norma, ya que la convergencia de una sucesión $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^d$ con cualquier norma $\|\cdot\|$ es equivalente a la convergencia de sus d coordinadas $(x_i^n)_n \subseteq \mathbb{R}$. Luego, una sucesión de $\mathbb{R}^d$ es Cauchy (respectivamente, convergente) si y solo si sus sucesiones de coordinadas son Cauchy (respectivamente, convergentes). Dado que $\mathbb{R}$ es completo, se deduce que $\mathbb{R}^d$ es completo.

(vi) $(\mathcal{C}([0,1]).\|\cdot\|_\infty)$ (véase Ejemplo 2.1.8(I)). Tomamos $\Gamma = [0,1]$ y mostramos que el espacio de funciones continuas sobre $[0,1]$ es un subespacio cerrado del espacio $\ell^\infty([0,1])$, por lo que se deducirá su completitud gracias a la Proposición 2.4.3.
En efecto, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas que converge hacia $f \in \ell^\infty([0,1])$, es decir, $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Tenemos que mostrar que f es continua. Para eso, sea $t \in [0,1]$ arbitrario y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \leq n_0$ se tiene que $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/3$. Sea $\delta > 0$ dado por la continuidad de f_{n_0} en $t \in [0,1]$, de forma que para todo $s \in (t-\delta, t+\delta) \cap [0,1]$ se tiene que $|f_{n_0}(s) - f_{n_0}(t)| < \varepsilon/3$. Se deduce

$$\begin{aligned} |f(s) - f(t)| &\leq |f(s) - f_{n_0}(s)| + |f_{n_0}(s) - f_{n_0}(t)| + |f_{n_0}(t) - f(t)| \\ &\leq 2\|f_{n_0} - f\|_\infty + |f_{n_0}(s) - f_{n_0}(t)| < \varepsilon\,, \end{aligned} .$$

por lo que se concluye la continuidad de f en t. Dado que t es arbitrario, concluimos que $f \in \mathcal{C}([0,1])$. $\square$

(vii) $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ Consideramos a continuación el espacio normado de las sucesiones nulas (*i.e.* convergentes a cero)

$$c_0(\mathbb{N}) := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\} \quad (\subseteq \quad \ell^\infty(\mathbb{N}))\,.$$

De manera similar al ejemplo anterior, mostramos que $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach estableciendo que $\ell^\infty(\mathbb{N}) \setminus c_0(\mathbb{N})$ es un conjunto abierto de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ (*c.f.* Proposición 2.4.3). Sea $x = (x_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \setminus c_0(\mathbb{N})$. Como x no es una sucesión nula, existe $\delta > 0$ tal que el conjunto

$$\mathbb{N}^\delta := \{n \in \mathbb{N} : |x_n| > 2\delta\}$$

tiene cardinalidad

$$\mathrm{card}(\mathbb{N}^\delta) = \aleph_0.$$

Mostramos que la bola $B(x, \delta) \subseteq \ell^\infty(\mathbb{N}) \setminus c_0(\mathbb{N})$. En efecto, sea $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B(x, \delta)$. Para todo $n \in \mathbb{N}^\delta$ se tiene que

$$|y_n| \geq |x_n| - |y_n - x_n| \geq 2\,\delta - \|y - x\|_\infty \geq \delta$$

lo que muestra que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es una sucesión nula, por lo tanto $y \notin c_0(\mathbb{N})$. $\square$

(viii) $(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$, $p \in [1, \infty)$ (véase Ejemplo 2.1.8(IV)). Hemos visto que $\ell^p := \ell^p(\mathbb{N})$ es un espacio normado, con norma

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} |x(i)|^p\right)^{1/p}, \quad x = (x(i))_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^p$$

Mostramos ahora su completitud. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en ℓ^p. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ el elemento x_n es una sucesión $x_n(i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$, y se tiene que

$$|x_n(i) - x_m(i)| \leq \|x_n - x_m\|_p$$

(por la definición de la norma-p). Se deduce que $(x_n(i))_{i\in\mathbb{N}}$ es Cauchy por lo tanto converge a un número real $x(i)$. Consideramos la sucesión $x = (x(i))_{i\in\mathbb{N}}$ definida por $x(i) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(i)$. Mostraremos que $x \in \ell^p$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\|_p = 0$.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\|_p < \varepsilon/2$ para todo $n, m \geq N$. Se deduce que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_n(i) - x_m(i)|^p\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Tomando el límite cuando $m \to \infty$ se deduce que para todo $n \geq N$ y $l \in N$

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} |x_n(i) - x_m(i)|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_n(i) - x(i)|^p\right)^{1/p} \leq \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{2.36}$$

Se deduce por la desigualdad de Minkowski (véase (2.11)) que

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x(i)|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} |x_n(i)|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{k} |x_n(i) - x(i)|^p\right)^{1/p} \leq \|x_n\|_p + \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{2.37}$$

Tomando el límite $k \to \infty$ en (2.37) deducimos que $x = (x(i))_{i\in\mathbb{N}}$ pertenece a ℓ^p, luego por (2.36) se deduce que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_p = 0$. $\square$

A continuación veremos los cuatro teoremas fundamentales de la teoría de los espacios métricos completos:

– *Teorema de Intersección de Cantor*;

– *Teorema de Categoría de Baire*;

– *Teorema de Punto Fijo de Banach*;

– *Principio Variacional de Ekeland*.

2.4.2. Teorema de Intersección de Cantor

Empezaremos esta sección con el siguiente teorema.

TEOREMA 2.4.5

(Teorema de las bolas encajadas) Sea (X, d) un espacio métrico completo y $\{\overline{B}(x_n, r_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de bolas cerradas tal que

(i) $\overline{B}(x_1, r_1) \supseteq \ldots \supseteq \overline{B}(x_n, r_n) \supseteq \overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \supseteq \ldots$ (bolas encajonadas)

(ii) $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$,

Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n) \neq \varnothing$

DEMOSTRACIÓN: Veamos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$, $r_n < \varepsilon/2$. En particular, para todo $n, m \geq n_0$ se deduce que x_n y x_m pertenecen a $\overline{B}(x_{n_0}, r_{n_0})$ por lo que se deduce

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_m, x_{n_0}) \leq 2r_{n_0} < \varepsilon,$$

es decir, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como el espacio (X, d) es completo, entonces $x_n \to \overline{x} \in X$. Para cada $n_0 \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $y_n = x_{n_0+n}$ converge a $\overline{x} \in X$. Concluimos que $\overline{x} \in \overline{B}(x_{n_0}, r_{n_0})$, para cada $n_0 \in \mathbb{N}$, es decir, $\overline{x} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n) \neq \varnothing$. $\square$

Una versión más general del teorema anterior, es el *teorema de intersección de Cantor*.

Teorema 2.4.6

(Teorema de Intersección de Cantor) Sea (X, d) un espacio métrico completo, y $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos cerrados encajonados, es decir,

$$K_1 \supseteq \ldots \supseteq K_{n-1} \supseteq K_n \supseteq K_{n+1} \supseteq \ldots$$

y tales que

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(K_n) = 0.$$

Entonces existe $x \in X$ tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\} \neq \varnothing.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que $\operatorname{diam}(K_n) < \varepsilon$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escogemos un elemento $x_n \in K_n$ y formamos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (*c.f.* Axioma de Elección). En particular, si $m, n \geq N$, entonces $x_n, x_m \in K_N$ y (por la hipótesis del encajonamiento) se tiene que

$$d(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam}(K_N) < \varepsilon.$$

Por lo tanto la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, y como (X, d) es completo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a un elemento $x \in X$. Fijamos $m \in \mathbb{N}$ y consideramos cualquier $n \geq m$. Se deduce nuevamente de la hipótesis del encajonamiento que $x_n \in K_n \subseteq K_m$, y por lo tanto $(x_n)_{n\geq m} \subseteq K_m$. Dado que K_m es cerrado y $m \in \mathbb{N}$ es arbitrario, se deduce que

$$\forall m \in \mathbb{N} : \quad x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+m} \in K_m \quad \Longrightarrow \quad x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Mostramos por último que $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ es un singleton. Supongamos que existen $x, x' \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, con $x' \neq x$. Esto significa que

$$\operatorname{diam}(K_n) \geq d(x, y) > 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

lo que contradice la hipótesis que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(K_n) = 0$. $\square$

Con el siguiente ejemplo vemos la necesidad de todas las hipótesis en el teorema de Cantor.

Ejemplo 2.4.7 (Necesidad de las hipótesis) (i) (Completitud) Sea $X = \mathbb{Q}$ (espacio métrico no completo). Consideramos dos sucesiones de números racionales que convergen de forma creciente, y respectivamente decreciente, al número irracional $\sqrt{2}$, es decir, $q_n \nearrow \sqrt{2}$ y $\tilde{q}_n \searrow \sqrt{2}$. Consideramos los conjuntos $K_n = [q_n, \tilde{q}_n]$ (obviamente cerrados, encajonados), y vemos que $\mathrm{diam}(K_n) = \tilde{q}_n - q_n \to 0$, pero $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \varnothing$.

(ii) ($\mathrm{diam}(K_n)$) Sea $X = \mathbb{R}$ (espacio métrico completo) y sea $K_n = [n, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ una familia de cerrados encajonados. Observamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \varnothing$, lo que se debe al hecho que la sucesión de diámetros $\mathrm{diam}(K_n)$ no converge a 0.

(iii) (Cerrados/encajonados) En el espacio métrico completo $\mathbb{R}$, podemos considerar a la vez la familia encajonada $K_n = (0, 1/n]$ con $\mathrm{diam}(K_n) \to 0$, y respectivamente, la familia de los conjuntos cerrados $K_n = [n, n+1/n]$ con $\mathrm{diam}(K_n) \to 0$. En ambos casos la intersección es vacía, lo que muestra que tanto la hipótesis que los conjuntos son cerrados, o que la familia está encajonada son indispensables.

2.4.3. Teorema de Categorías de Baire

En esta sección presentaremos el segundo conjunto de teoremas fundamentales en la teoría de los espacios métricos completos, los llamados Teoremas de Categoría de Baire. Como veremos, dicho conjunto de teoremas es una aplicación del teorema de Cantor.

Teorema 2.4.8

(Teorema de Categoría de Baire - I) Sea (X, d) espacio métrico completo y sea $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de conjuntos abiertos densos. Entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n \qquad \text{es (un conjunto } G_\delta\text{) denso .}$$

Demostración: Mostraremos la densidad estableciendo que la intersección anterior tiene elementos en cada bola del espacio X. Consideramos entonces $x \in X$ y $r > 0$ arbitrarios (definiendo la bola $B(x, r)$). Como $\mathcal{U}_1$ es un abierto denso, entonces $\mathcal{U}_1 \cap B(x, r) \neq \varnothing$. Sea $x_1 \in \mathcal{U}_1 \cap B(x, r)$. Al ser un conjunto abierto, existe $r_1 > 0$ tal que $B(x_1, r_1) \subseteq \mathcal{U}_1 \cap B(x, r)$. Cambiando posiblemente el valor de r_1 por un valor más pequeño, podemos suponer que

$$0 < r_1 < 1 \quad \text{y} \quad \overline{B}(x_1, r_1) \subseteq \mathcal{U}_1 \cap B(x, r).$$

Como $\mathcal{U}_2$ es un conjunto abierto y denso y $B(x_1, r_1)$ es un conjunto abierto no vacío, existe $x_2 \in \mathcal{U}_2 \cap B(x_1, r_1)$ y de la misma manera que antes podemos elegir

$$0 < r_2 < \frac{1}{2} \quad \text{tal que} \quad \overline{B}(x_2, r_2) \subseteq \mathcal{U}_2 \cap B(x_1, r_1).$$

Siguiendo con el procedimiento de manera inductiva obtenemos para cada $n \in \mathbb{N}$ una sucesión $x_n \in \mathcal{U}_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$ tal que

$$0 < r_n < \frac{1}{n} \quad \text{tal que} \quad \overline{B}(x_n, r_n) \subseteq \mathcal{U}_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}).$$

Se tiene entonces que

$$\left.\begin{array}{c} \ldots \supseteq \overline{B}(x_n, r_n) \supseteq \overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \supseteq \ldots \\ \text{con } \lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n),$$

donde la implicancia se tiene por el teorema de Cantor.

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$. Entonces por construcción se tiene que

$$\overline{B}(x_{n_0}, r_{n_0}) \subseteq \mathcal{U}_{n_0} \quad \text{y} \quad (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_{n_0+n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{B}(x_{n_0}, r_{n_0}) \subseteq B(x, r),$$

es decir $\overline{x} \in \overline{B}(x_{n_0}, r_{n_0}) \subseteq \mathcal{U}_{n_0}$, y por lo tanto

$$\overline{x} \in B(x, r) \bigcap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n\right) \neq \varnothing,$$

lo que establece lo pedido. □

A continuación llamaremos un conjunto $\Gamma \subseteq X$ *genérico* (o *residual*) si Γ contiene un subconjunto G_δ-denso. Con esta terminología el Teorema 2.4.8 se puede enunciar de la siguiente manera:

Intersección numerable de conjuntos abiertos densos
en un espacio métrico completo es un conjunto residual.

Introducimos la siguiente definición:

Definición 2.4.9

(Conjunto nulamente denso) Un conjunto $A \subseteq X$ se dice *nulamente denso* si $\mathrm{int}(\overline{A}) = \varnothing$. Es inmediato de la definición que A es nulamente denso si y solo si su complemento $X \setminus A$ contiene un conjunto abierto y denso.

Definición 2.4.10

(Primera/segunda categoría) (i) Un conjunto $K \subseteq X$ se dice de *primera categoría* si K se puede representar como unión numerable de conjuntos nulamente densos, es decir

$$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \text{con} \quad \operatorname{int}(\overline{A_n}) = \varnothing.$$

(ii) Un conjunto $K \subseteq X$ se dice de *segunda categoría* si no es de primera categoría.

Es inmediato de la definición que un conjunto K es de primera categoría, si y solo si su complemento $X \setminus K$ contiene una intersección numerable de conjuntos abiertos densos. Lo anterior equivale a decir que $X \setminus K$ es residual, si el espacio métrico es completo. La importancia de la completitud del espacio se muestra con el siguiente contraejemplo.

Ejemplo 2.4.11 (Pertinencia de la completitud) Consideramos nuevamente el espacio métrico $X = \mathbb{Q}$ de los números racionales. Sea $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$. Entonces cada conjunto finito es nulamente denso ya que $\mathbb{Q}$ no contiene puntos aislados, por lo que los conjuntos $\mathcal{U}_n = \mathbb{Q} \setminus \{q_1, \ldots, q_n\}$ son abiertos y densos. Observamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n = \varnothing$, en particular $\mathbb{Q}$ es de primera categoría y la conclusión del Teorema 2.4.8 falla.

Enunciamos una versión equivalente del Teorema 2.4.8.

Corolario 2.4.12 (Teorema de Categoría de Baire - II) *Cada espacio métrico completo es de segunda categoría.*

DEMOSTRACIÓN: Sea X un espacio métrico completo y supongamos hacía contradicción que X es un conjunto de primera categoría. Entonces existen conjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nulamente densos tales que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Tomando complementos obtenemos el conjunto vacío como intersección numerable de conjuntos abiertos densos lo que contradice la conclusión del Teorema 2.4.8. $\square$

Observación 2.4.13 ($\mathbb{Q}$ no es un conjunto G_δ) El conjunto $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto F_σ y de primera categoría, ya que se puede inscribir como unión numerable de sus elementos (singletons)

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{q\}$$

que son en particular nulamente densos. Por lo tanto, $\mathbb{Q}$ no puede ser completo bajo ninguna distancia para la cual los singletons son nulamente densos. Mostramos ahora que $\mathbb{Q}$, visto como subconjunto de los reales, no es G_δ. En efecto, si $\mathbb{Q}$ fuera G_δ, entonces considerando una enumeración $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}$, deduciríamos que los subconjuntos densos $\mathcal{U}_n = \mathbb{Q} \setminus \{q_1, \ldots, q_n\}$ también fueran G_δ, lo que contradice la completitud de $\mathbb{R}$, dado que tienen intersección vacía (véase Ejemplo 2.4.11). $\square$

Combinando la observación anterior con la Proposición 2.3.16 se obtiene el siguiente interesante resultado.

Corolario 2.4.14 (Puntos de continuidad) (i) *No existe ninguna función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ que sea continua exactamente en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los racionales.*

(ii) *Existe una función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ que es continua exactamente en el conjunto de los irracionales $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

DEMOSTRACIÓN: Dado que $\mathbb{R}$ no tiene puntos aislados, $\mathbb{Q}$ no es G_δ (*c.f.* observación anterior) y $\mathbb{I}$ es G_δ (complemento del $\mathbb{Q}$ que es F_σ), ambos resultados son consecuencia de la Proposición 2.3.16 y Proposición 2.3.17. $\square$

Observación 2.4.15 (Categoría vs subespacios) Consideramos a continuación el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números naturales. Observamos que $\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{n\}$ y por lo tanto, visto como subconjunto de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ es de primera categoría (los singletons son nulamente densos en $\mathbb{R}$). Por otra parte, $\mathbb{Z}$ es un espacio métrico discreto, y como tal es completo y de segunda categoría en si mismo (*c.f.* Teorema 2.4.8). Obsérvense que los singletons $\{\{n\} : n \in \mathbb{Z}\}$ son abiertos en la topología discreta de $\mathbb{Z}$.

Enunciamos por último una tercera versión del Teorema de Categoría de Baire.

Corolario 2.4.16 (Teorema de Categoría de Baire - III) *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Entonces*

$$\left.\begin{array}{c} \forall n \in \mathbb{N} \\ K_n \ \text{cerrado} \\ \text{int}(K_n) = \varnothing \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \varnothing.$$

DEMOSTRACIÓN: Por hipótesis, los conjuntos cerrados K_n son nulamente densos, por lo que sus complementos $\mathcal{U}_n := X \setminus K_n$ son abiertos densos. Aplicando el Teorema 2.4.8

se deduce que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n \text{ denso en } X \quad \iff \quad \operatorname{int}\left(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n\right) = \operatorname{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \varnothing,$$

lo que es exactamente lo pedido. □

Citamos una manera intuitiva de entender esta versión del Teorema de Categoría de Baire:

En un espacio métrico completo no se puede crear interior
mediante uniones numerables de conjuntos nulamente densos.

El Teorema de Categoría de Baire tiene consecuencias muy importantes en el Análisis Funcional que veremos más adelante. Antes de cerrar la sección presentaremos algunas aplicaciones inmediatas.

I. Cardinalidad de la base algebraica.

Una consecuencia notable del teorema de Baire es el hecho que la base algebraica de un espacio de Banach tiene cardinalidad finita o no numerable. La demostración está basada en la siguiente versión del Corolario 2.4.16.

Corolario 2.4.17 *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos cerrados. Entonces:*

$$X = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \exists n_0 \in \mathbb{N} \\ \operatorname{int}(K_{n_0}) \neq \varnothing. \end{cases} \tag{2.38}$$

Corolario 2.4.18 (Cardinalidad de base de Hamel) *Si un espacio de Banach tiene base algebraica numerable, entonces es de dimensión finita.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que E tiene una base algebraica numerable infinita, es decir $E = \langle e_1, e_2, \ldots \rangle$. Consideremos los siguientes subespacios de dimensión finita de E

$$F_n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle \le E.$$

Dichos subespacios son completos (y cerrados en E). Dado que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, deducimos del Corolario 2.4.12 que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\operatorname{int}(F_{n_0}) \neq \varnothing$. Por lo tanto, existen $x_0 \in E$ y $r > 0$, tal que $B(x_0, r) \subseteq F_{n_0}$. Como F_{n_0} es un subespacio vectorial, se tiene que $-x_0 \in F_{n_0}$ y se deduce que $B(0,r) = B(x_0,r) - \{x_0\} \subseteq F_{n_0}$, luego

$$E \equiv \bigcup_{\lambda \geq 0} B(0,r) \subseteq F_{n_0},$$

lo cual es una contradicción, ya que $F_{n_0} \subsetneq E$. $\square$

Veamos una consecuencia directa del resultado anterior.

Ejemplo 2.4.19 (Dimensión de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\}$ de las sucesiones en $\mathbb{R}$. Dado que el espacio $\ell^\infty(\mathbb{N}) \subsetneq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es completo (Ejemplo 2.4.4(iii)) y de dimensión infinita, la dimensión de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ no puede ser numerable y por lo tanto la dimensión de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tampoco puede ser numerable.

N.B. Es interesante notar que la extensión natural de la base canónica

$$e_n = (0,0,\ldots,0,\underbrace{1}_{n},0,\ldots), \quad n \in \mathbb{N},$$

genera naturalmente el espacio $c_{00}(\mathbb{N})$ (se mostró en el Ejemplo 2.4.1 que este espacio no es completo) que es isomorfo al espacio de polinomios de una variable real $\mathbb{R}[X]$.

II. Cardinalidad vs completitud

Presentamos ahora otras consecuencias del Teorema 2.4.8.

Proposición 2.4.20 (Conjuntos numerables de segunda categoría) *Sea (X,d) un espacio métrico con $\operatorname{card}(X) \leq \aleph_0$. Entonces:*

$$X \text{ es de segunda categoría} \iff X \setminus X' \neq \varnothing.$$

DEMOSTRACIÓN: ($\Rightarrow$) Si $X \setminus X' = \varnothing$, entonces el singleton $\{x\}$ tiene interior vacío para todo $x \in X$. Luego, como $X = \bigcup_{x\in X} \{x\}$ y $\operatorname{card}(X) \leq \aleph_0$, se obtiene que X es de primera categoría, lo que contradice la hipótesis.

($\Leftarrow$) Sea $x \in X$ un punto aislado. Entonces ningún cerrado que contenga a x puede tener interior vacío (ya que $\{x\}$ es abierto). Así, X no se puede escribir como unión de cerrados de interior vacío. $\square$

Proposición 2.4.21 (Cardinalidad de abiertos) *Si (X,d) es un espacio métrico completo y $X = X'$, entonces para cada abierto no vacío $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}$, se tiene que $\operatorname{card}(\mathcal{U}) > \aleph_0$.*

DEMOSTRACIÓN: Es una consecuencia inmediata del Corolario 2.4.16 y del hecho que los singletons son (cerrados y) tienen interior vacío (ya que no hay puntos aislados).□

Proposición 2.4.22 *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Si $\operatorname{card}(X) = \aleph_0$, entonces $X \setminus X'$ es un conjunto infinito y G_δ denso en X.*

DEMOSTRACIÓN: Notamos primero que si el conjunto $I := X \setminus X'$ de los puntos aislados de X fuera finito (o vacío), entonces quitándolo de X obtendríamos un espacio métrico completo $Y := X \setminus I = X'$ sin puntos aislados (es decir, $Y = Y'$) y con $\operatorname{card}(Y) = \aleph_0$, lo que contradice la Proposición 2.4.21. Luego, si $X' = \varnothing$ entonces $I = X$ es obviamente G_δ denso. En el caso contrario, observamos que

$$I := X \setminus X' = \bigcap_{x \in X'} (X \setminus \{x\}),$$

es una unión numerable de abiertos densos, por lo tanto, concluimos aplicando el Teorema 2.4.8 (Teorema de Baire - I). □

Cerramos esta parte con el siguiente resultado.

Proposición 2.4.23 *El conjunto $\mathbb{R}$ no se puede escribir como unión numerable de conjuntos cerrados, disjuntos y no vacíos.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que existe una familia numerable $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ cerrados y disjuntos tal que $\mathbb{R} = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la frontera $T_n = \partial F_n$ de F_n y ponemos $T = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} T_n$ (también unión disjunta de cerrados). Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario y veamos que T_n tiene interior vacío en T. En efecto, sea $x \in T_n := \partial F_n$ y $\varepsilon > 0$. Como x pertenece a la frontera del cerrado F_n la bola $B(x, \varepsilon)$ debe tener intersección no vacía con al menos un conjunto cerrado F_m, con $m \neq n$. Dado que $F_m \cap F_n = \varnothing$ y $x \in T_n \subseteq F_n$, deducimos que existe un elemento $y \in B(x, \varepsilon) \cap F_m$ distinto de x. Si $y < x$, tomamos $z = \sup\{w \in F_m : w < x\}$. En el caso contrario, $y > x$ y tomamos $z = \inf\{w \in F_{n'} : w > x\}$. En ambos casos es fácil ver que $z \in T_m = \partial F_m$. Por lo tanto T_m tiene interior vacío en T. Como T es cerrado en $\mathbb{R}$ (pues $T = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{int} F_n$) deducimos por la Proposición 2.4.3 que T es completo (visto como espacio métrico con la métrica inducida de $\mathbb{R}$). Eso contradice el Corolario 2.4.12. □

2.4.4. Teorema de Punto Fijo de Banach

En esta sección veremos un tercer teorema fundamental en la teoría de los espacios métricos completos. Empezamos con la siguiente definición de una *contracción*.

DEFINICIÓN 2.4.24

(Contracción) Sean (X,d), (Y,ρ) dos espacios métricos. Una función $f : X \mapsto Y$ se dice contracción, si es Lipschitz continua (*c.f.* Definición 2.3.7) con constante $K < 1$, es decir, para todo $x_1, x_2 \in X$ se tiene que

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq K\, d(x_1, x_2) \qquad (K < 1) \tag{2.39}$$

El teorema de *punto fijo de Banach* asegura que cada contracción $f : X \mapsto X$ definida en un espacio completo (X,d) *con valores a si mismo* tiene exactamente un punto fijo, es decir, existe $\bar{x} \in X$ con $f(\bar{x}) = \bar{x}$ (además el punto $\bar{x}$ es único con esta propiedad). Para demostrar este resultado utilizaremos el siguiente lema.

Lema 2.4.25 (Sucesión de iteraciones de una contracción) *Sea (X,d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una contracción. Sea $x_0 \in X$. Entonces la sucesión, definida de forma recursiva:*

$$x_1 = f(x_0) \qquad y \qquad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

es una sucesión de Cauchy.

DEMOSTRACIÓN: Observamos primero que $d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq K d(x_1, x_0)$. Se puede mostrar fácilmente por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$d(x_{n+1}, x_n) \;\leq\; K^n\, d(x_1, x_0).$$

Mostramos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Podemos suponer que $x_1 \neq x_0$ (ya que si $x_1 = f(x_0) = x_0$, entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión constante $x_n = x_0$).

Sea $\varepsilon > 0$. Como $K < 1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} K^n = \frac{K}{1-K}$$

converge, por lo tanto existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n$

$$\sum_{i=n}^{m-1} K^i \;<\; \sum_{i=n}^{m} K^i \;<\; \frac{\varepsilon}{d(x_1, x_0)}.$$

En particular,

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &\leq d(x_n,x_{n+1}) + \ldots + d(x_{m-1},x_m) \leq \\ &\leq K^n d(x_1,x_0) + \ldots + K^{m-1} d(x_1,x_0) \leq \left(\sum_{i=n}^{m-1} K^i\right) d(x_1,x_0) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy y se concluye lo pedido. □

A continuación enunciamos el famoso Teorema del Punto Fijo de Banach.

TEOREMA 2.4.26

(Teorema del punto fijo de Banach) Sea (X,d) un espacio métrico completo y sea $f : X \to X$ una contracción. Entonces existe único $\bar{x} \in X$ tal que

$$f(\bar{x}) = \bar{x}\,.$$

DEMOSTRACIÓN: (Existencia) Sea $x_0 \in X$ y consideremos la sucesión de iteraciones

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por el Lema 2.4.25 dicha sucesión es de Cauchy, por lo tanto existe $\bar{x} \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \bar{x}.$$

Como f es continua, se deduce que

$$f(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \bar{x}.$$

Lo anterior muestra que $\bar{x}$ es un punto fijo de f.

(Unicidad) Sean $\bar{x}, \bar{y} \in X$, tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$ y $f(\bar{y}) = \bar{y}$. Luego

$$d(\bar{x},\bar{y}) = d(f(\bar{x}), f(\bar{y})) \leq K d(\bar{x},\bar{y})$$

con $K < 1$. Se tiene entonces que $d(\bar{x},\bar{y}) = 0$. Concluimos que $\bar{x} = \bar{y}$. □

Observación 2.4.27 (Pertinencia de la hipótesis de contracción) Una contracción $f : X \mapsto X$ satisface en particular

$$d(f(x_1), f(x_2)) < d(x_1,x_2), \quad \text{para todo } x_1, x_2 \in X\,. \tag{2.40}$$

Es fácil ver que la relación anterior asegura la unicidad del punto fijo (si este último existe), pero no garantiza su existencia. En efecto, la función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x + \frac{1}{1+e^x}$$

satisface (2.40) pero no tiene puntos fijos (y obviamente no puede ser una contracción).

El teorema de punto fijo de Banach tiene aplicaciones en la teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Una aplicación importante de este teorema se conoce como el *Teorema de Existencia y Unicidad*, que veamos a continuación.

Teorema 2.4.28

(Teorema de Picard) Sea $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continua. Supongamos que existe $L > 0$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ y para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$ se tiene que

$$\|F(t,x) - F(t,y)\| \leq L\,\|x - y\|\,,$$

es decir, F es uniformemente L-Lipschitz continua con respecto a su segunda variable. Sea $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ (condición inicial).
Entonces existe $\delta > 0$, para el cual el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & F(t, x(t)) \\ x(t_0) & = & x_0\,, \end{array} \right. \tag{2.41}$$

tiene una única solución $t \mapsto x(t)$ de clase $\mathcal{C}^1$ en el intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\delta < L^{-1}$. Consideramos el espacio normado $X = \mathcal{C}([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^d)$ de las curvas continuas del intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^d$ con norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \|x(t)\|\,.$$

Definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & X & \to & X \\ & x & \mapsto & \Phi(x)(s) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{s} F(t, x(t))dt. \end{array}$$

Mostramos que Φ es una contracción. Sean $x, y \in X$ y $s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Luego

$$\begin{aligned} \|\Phi(x)(s) - \Phi(y)(s)\| &= \left| \int_{t_0}^{s} F(t, x(t))\, dt - \int_{t_0}^{s} F(t, y(t))\, dt \right| \\ &\leq \int_{t_0}^{s} \|F(t, x(t)) - F(t, y(t))\|\, dt \leq \int_{t_0}^{s} L\, \|x(t) - y(t)\|\, dt \\ &\leq L\, \|x - y\|_\infty \int_{t_0}^{s} dt \ \leq\ (L \cdot \delta)\, \|x - y\|_\infty . \end{aligned}$$

Al poner $K := L \cdot \delta < 1$ y al tomar supremo sobre todo $s \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ obtenemos

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty \ \leq\ K \cdot \|x - y\|_\infty,$$

es decir, Φ es una contracción sobre X. Por el Teorema 2.4.26, existe un único elemento $\bar{x} \in X$ (curva continua) tal que $\Phi(\bar{x}) = \bar{x}$. Entonces para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ se tiene que

$$\Phi(\bar{x})(t) = \bar{x}_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, \bar{x}(s)) ds \ =\ \bar{x}(t). \tag{2.42}$$

La relación anterior nos dice que la curva $t \mapsto x(t)$ es de hecho diferenciable con derivada

$$\dot{\bar{x}} = F(t, \bar{x}(t)).$$

Tomando $t = t_0$ se deduce también que $\bar{x}(t_0) = x_0$. Por último, notamos que cada curva $x \in X$ que satisface (2.41) debe satisfacer también (2.42), por lo tanto, siendo punto fijo de Φ, es única. $\square$

2.4.5. Principio Variacional de Ekeland

En esta sección mostraremos el último teorema fundamental de la teoría de espacios métricos completos, conocido como Principio Variacional de Ekeland. Dicho teorema fue enunciado y demostrado por Ivar Ekeland en el año 1974. Antes de proceder al enunciado del teorema, necesitamos la siguiente definición.

Definición 2.4.29

(Semi-continuidad inferior) Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $f : X \mapsto \mathbb{R}$ se dice *semi-continua inferiormente* (en abreviación *s.c.i.*) en $\bar{x} \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \quad f(B(\bar{x}, \delta)) \subseteq (f(\bar{x}) - \varepsilon, +\infty) \tag{2.43}$$

o de forma equivalente,

$$\forall \{x_n\}_n \subseteq X : \quad (x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x} \quad \Longrightarrow \quad \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(\bar{x}). \tag{2.44}$$

La función f se dice semi-continua inferiormente si es s.c.i. en cada $x \in X$.

Observación 2.4.30 La definición anterior, basada en la relación del orden, tiene sentido solo para funciones con valores en $\mathbb{R}$. Se puede definir de forma análoga la noción de *semi-continuidad superior* (en abreviación, *scs*) cambiando en la relación (2.43) el intervalo $(f(\bar{x}) - \varepsilon, +\infty)$ por el intervalo $(-\infty, f(\bar{x}) + \varepsilon)$, o de forma equivalente, el límite inferior $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(\bar{x})$ por el límite superior $\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \leq f(\bar{x})$. Es obvio que f es s.c.i. en $\bar{x}$ si y solo si $-f$ es s.c.s. en $\bar{x}$, luego, f es continua en $\bar{x}$ si y solo si f es a la vez s.c.i. y s.c.s. en $\bar{x}$.

La siguiente caracterización se demuestra de forma similar al caso continuo (comparar con la Proposición 2.3.5).

Proposición 2.4.31 (Caracterización de la semi-continuidad inferior) *Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \mapsto \mathbb{R}$. Los siguientes son equivalentes:*

(i) *f es semi-continua inferiormente ;*

(ii) *$f^{-1}((\alpha, +\infty))$ es abierto en X para todo $\alpha \in \mathbb{R}$;*

(iii) *$f^{-1}((-\infty, \beta])$ es cerrado en X para todo $\beta \in \mathbb{R}$.*

Procedemos ahora en enunciar el teorema principal de esta sección, conocido como el Principio Variacional de Ekeland.

TEOREMA 2.4.32

(Principio Variacional de Ekeland) Sea (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \mapsto \mathbb{R}$ una función semi-continua inferiormente. Sea $\varepsilon > 0, \lambda > 0$ y $x_0 \in X$ tal que

$$f(x_0) < \inf_{x\in X} f + \varepsilon\lambda. \tag{2.45}$$

Entonces existe $\bar{x} \in B(x_0, \varepsilon)$ tal que para todo $x \in X$, con $x \neq \bar{x}$

$$f(\bar{x}) \, < \, f(x) \, + \, \lambda \, d(x, \bar{x}) \, . \tag{2.46}$$

DEMOSTRACIÓN: Es implícito del enunciado que

$$s_0 := \inf_{x\in X} f \;>\; -\infty.$$

Para todo $x \in X$ definimos el siguiente conjunto

$$K(x) = \{y \in X : \quad f(y) \,+\, \lambda\, d(y,x) \;\leq\; f(x)\}. \tag{2.47}$$

Notamos que para todo $x \in X$ se tiene que $x \in K(x)$, por lo tanto $K(x) \neq \varnothing$. Utilizando la semi-continuidad inferior de f y la continuidad de la función $y \mapsto d(y,x)$ mostramos fácilmente que $K(x)$ es cerrado. Por último, mediante la desigualdad triangular se comprueba directamente que

$$y \in K(x) \qquad \Longrightarrow \qquad K(y) \subseteq K(x). \tag{2.48}$$

Sea $s_1 := \inf_{x\in K(x_0)} f(x) \;\geq\; s_0$, luego elegimos $x_1 \in K(x_0)$ tal que $f(x_1) < s_1 + \varepsilon\lambda$. Entonces se deduce de (2.48) que $K(x_1) \subseteq K(x_0)$ por lo tanto

$$s_2 := \inf_{x\in K(x_1)} f(x) \geq s_1$$

y elegimos $x_2 \in K(x_1)$ tal que $f(x_2) < s_2 + \frac{\varepsilon\lambda}{2}$. Continuando de esta forma definimos inductivamente una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X dando lugar a una sucesión de subconjuntos de X cerrados encajonados

$$K(x_0) \supseteq K(x_1) \supseteq \cdots \supseteq K(x_n) \supseteq \ldots$$

y una sucesión de números reales $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \ldots$ de forma que

$$x_{n+1} \in K(x_n), \qquad \text{y} \quad f(x_{n+1}) < s_{n+1} + \frac{\varepsilon\lambda}{n+1}.$$

Mostramos que la familia $\{K(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface las hipótesis del Teorema 2.4.6. En efecto, sea $y \in K(x_n)$ (arbitrario). Entonces $s_n \leq s_{n+1} \leq f(y)$ luego por (2.47)

$$f(y) \,+\, \lambda d(y,x_n) \;\leq f(x_n) \;<\; s_n \,+\, \frac{\varepsilon\lambda}{n}$$

de donde se deduce que para todo $y \in K(x_n)$ se tiene $d(y,x_n) \leq \frac{\varepsilon}{n}$, luego

$$\operatorname{diam}(K(x_n)) \;\leq\; \frac{2\varepsilon}{n} \quad \Big(\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\Big)\,.$$

Como X es un espacio métrico completo, aplicando el Teorema 2.4.6 (Teorema de Cantor) concluimos que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K(x_n) = \{\bar{x}\}.$$

En particular, $\bar{x} \in K(x_0)$, de donde se deduce que $d(\bar{x},x_0) < \varepsilon$. Luego para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\bar{x} \in K(x_n)$ y debido a (2.48) se tiene que $K(\bar{x}) \subseteq K(x_n)$, por lo tanto $\operatorname{diam}(K(\bar{x})) = \{0\}$. De esta última relación se deduce que $K(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$ o de forma equivalente, si $x \in X$ y $x \neq \bar{x}$, entonces $x \notin K(\bar{x})$. Eso significa exactamente que (2.46) es cierta. $\square$

A continuación mostraremos que la validez del Principio Variacional, incluso en una forma menos general, implica que el espacio es completo. Utilizaremos el siguiente lema:

Lema 2.4.33 *Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en un espacio métrico (X,d). Entonces:*

(i) Para todo $x \in X$ la sucesión $t_n := d(z_n, x)$, $n \in \mathbb{N}$, es Cauchy (convergente) en $\mathbb{R}$.

(ii) La función $\varphi : X \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) := \lim_{n\to\infty} d(z_n, x) \tag{2.49}$$

es Lipschitz continua.

DEMOSTRACIÓN: (i). Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > n_0$ se tiene que $d(z_n, z_m) < \varepsilon$. Sea $x \in X$ arbitrario. Por la desigualdad triangular se tiene que

$$d(z_n, x) \leq d(z_n, z_m) + d(z_m, x),$$

por lo tanto, intercambiando z_n y z_m, se obtiene eventualmente que

$$|t_n - t_m| \leq d(z_n, z_m) < \varepsilon,$$

es decir, $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy.

(ii). La función φ está bien definida (ya que las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$ son convergentes). Sea $x, y \in X$. Utilizando nuevamente la desigualdad triangular se tiene que $d(z_n, x) \leq d(z_n, y) + d(y, x)$. Tomando el límite cuando $n \to \infty$ (y observando que x, y se pueden intercambiar) se obtiene que φ es Lipschitz continua con constante $L = 1$.□

Proposición 2.4.34 (Principio de Ekeland implica completitud) *Sea (X,d) un espacio métrico. Supongamos que el espacio satisface la conclusión del principio variacional para cada función $f : X \mapsto \mathbb{R}$ semicontinua inferiormente[1] y acotada inferiormente. Entonces (X,d) es completo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Definimos la siguiente función Lipschitz (véase (2.49)).

$$\begin{cases} f : X \mapsto \mathbb{R}_+ \\ f(x) = 2\,\varphi(x) = 2\lim_{n\to\infty} d(z_n, x). \end{cases}$$

[1] Es suficiente considerar solo funciones Lipschitz continuas.

Hay que mostrar que existe $\bar{x} \in X$ tal que $f(\bar{x}) = 0$. (En efecto, en este caso $\bar{x}$ será el límite de la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.)

Aplicando el Principio Variacional, deducimos que existe $\bar{x} \in X$ tal que

$$f(\bar{x}) \leq f(x) + d(x, \bar{x}). \tag{2.50}$$

Vamos a mostrar que $f(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}) = 0$. Supongamos hacía contradicción que

$$\alpha = \varphi(\bar{x}) > 0.$$

Como la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq n_0$ se tiene que $d(z_m, z_n) < \alpha/16$. Tomando el límite $m \to \infty$ se deduce que $\varphi(z_n) \leq \alpha/16$, para todo $n \geq n_0$. Luego, substituyendo x por z_n en (2.50) obtenemos para todo $n > n_0$ que

$$2\alpha \leq \frac{2\alpha}{16} + d(z_n, \bar{x}) \qquad \Longrightarrow \qquad d(z_n, \bar{x}) - \alpha \geq \frac{7\alpha}{8} > 0. \tag{2.51}$$

Dado que

$$|d(z_n, \bar{x}) - \alpha| = |d(z_n, \bar{x}) - \phi(\bar{x})| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

obtenemos una contradicción con (2.51). □

2.5. Distancias equivalentes y uniformemente equivalentes

La continuidad de una función f entre dos espacios métricos (X, d) e (Y, ρ) es una noción topológica, en el sentido que depende solo de los abiertos de los espacios X e Y (véase Proposición 2.3.5). Por otra parte, la continuidad Lipschitz (y por lo tanto la contracción) es claramente una noción métrica. A continuación introducimos un nuevo concepto de continuidad que se encuentra entre la continuidad (noción topológica) y la continuidad Lipschitz (noción métrica), siendo una noción métrica como esta última.

Definición 2.5.1

(Continuidad uniforme) Sean (X, d), (Y, ρ) dos espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ se dice *uniformemente continua*, si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in X) \quad d(x_1, x_2) < \delta \implies \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon. \tag{2.52}$$

Observación 2.5.2 (Comparación entre conceptos de continuidad) (i) Cada función Lipschitz continua es uniformemente continua. En efecto, si f es L-Lipschitz (véase Definición 2.3.7) y $\varepsilon > 0$, es suficiente tomar $\delta := \varepsilon/L$ para ver que (2.52) es cierta. Por otra parte, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \sqrt{|x|}$ es uniformemente continua, pero no es Lipschitz continua (fíjense en el comportamiento de f al alrededor de $x = 0$).

(ii). Cada función uniformemente continua es continua: en efecto, en (2.52) la elección de $\delta > 0$ solo depende de $\varepsilon > 0$, mientras que en (2.34) también depende del punto de referencia. En términos de sucesiones, una función continua envía sucesiones convergentes a sucesiones convergentes, mientras que una función uniformemente continua, además de hacer eso, también envía sucesiones de Cauchy a sucesiones de Cauchy. Esta diferencia solo se puede apreciar en el caso de espacios métricos no completos (es decir, en espacios donde las sucesiones de Cauchy no son las mismas que las sucesiones convergentes). Sin embargo, la siguiente proposición nos proporcionará otra diferencia entre continuidad y continuidad uniforme, que esta vez es apreciable en cada espacio métrico, ya que es una caracterización de la continuidad uniforme.

Proposición 2.5.3 (Caracterización de la continuidad uniforme) *Sea $f : X \to Y$ una función entre los espacios métricos (X, d) e (Y, ρ).*

Los siguientes son equivalentes:

(i) f es uniformemente continua;

(ii) $\forall (x_n)_n$, $(y_n)_n \subseteq X$ tal que $d(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ se tiene que $\rho(f(x_n), f(y_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos primero que f es uniformemente continua y tomamos dos sucesiones $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ en X tales que $d(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Queremos establecer que $\rho(f(x_n), f(y_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Para eso, fijamos $\varepsilon > 0$ y tomamos $\delta > 0$ dado por (2.52). Por la convergencia de la sucesión real $t_n := d(x_n, y_n)$ a $0 \in \mathbb{R}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $d(x_n, y_n) < \delta$. Eso en particular garantiza que $\rho(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$.

Supongamos ahora que f no es uniformemente continua. En este caso, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen x_n, y_n en X tales que $d(x_n, y_n) < 1/n$ y $\rho(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$. Se forman así dos sucesiones $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ que contradicen directamente (ii). □

Utilizando la Proposición 2.5.3 se puede mostrar que la función continua $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ no es uniformemente continua. En efecto, considerando las sucesiones $x_n = n$ y $y_n = n + 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $|x_n - y_n| = 1/n \to 0$ mientras que

$|f(x_n) - f(y_n)| \geq 2$.

2.5.1. Identificación topológica vs identificación métrica

En la Sección 1.6 hemos considerado dos conjuntos X e Y como equivalentes, si existe una biyección entre ellos. (Recordamos que las clases de equivalencia definen entonces la cardinalidad del conjunto.) En este capítulo, estamos considerando conjuntos que tienen más estructura, es decir, que son espacios métricos. Nuestros conjuntos están ahora equipados con una distancia, mediante la cual se define una topología (conjuntos abiertos y cerrados), luego sucesiones convergentes, sucesiones de Cauchy, y conjuntos acotados. Dependiendo del nivel de identificación que necesitamos buscar, introducimos las siguientes definiciones (de orden decreciente de generalidad)

Definición 2.5.4

(Homeomorfismos e isometrías) Sean (X, d) e (Y, ρ) dos espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ se dice

– un *homeomorfismo* entre X e Y si es biyectiva y tanto f como su inversa f^{-1} son continuas. (En este caso los espacios métricos se dicen *homeomorfos*.)

– un *homeomorfismo uniforme* entre X e Y si es biyectiva y f, f^{-1} son uniformemente continuas.

– un *homeomorfismo bi-Lipschitz* entre X e Y si es biyectiva y existen $k, M > 0$ tales que para todo $x_1, x_2 \in X$ se tiene que

$$k\, d(x_1, x_2) \leq \rho(f(x_1), f(x_2)) \leq M\, d(x_1, x_2).$$

– una *isometría* entre X e Y, si es biyectiva y para todo $x_1, x_2 \in X$ se tiene que

$$d(x_1, x_2) = \rho(f(x_1), f(x_2)).$$

Notemos que una función biyectiva $f : X \to Y$ es un homeomorfismo si para cada sucesión $\{x_n\} \subseteq X$ se tiene que:

$$\{x_n\}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \quad \iff \quad \{f(x_n)\}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x),$$

por lo que un homeomorfismo identifica topológicamente los dos espacios: los espacios tendrán las mismas sucesiones convergentes (en el sentido de identificación mediante biyección), y por esto, los mismos conjuntos cerrados (y por lo tanto la misma topología).

Por otra parte, los homeomorfismos no respectan las sucesiones de Cauchy (lo que si que haría un homeomorfismo uniforme), por lo tanto un espacio completo puede ser homeomorfo a un espacio no completo (véase Ejemplo 2.5.5). Luego, un homeomoerfismo bi-Lipschitz es un homeomorfismo uniforme que además respecta los conjuntos acotados. Por último, una isometría identifica completamente la estructura de los espacios métricos (X, d) e (Y, ρ).

Ejemplo 2.5.5 (Homeomorfismo vs completitud) Sea $\mathcal{S}$ la esfera unitaria de $\mathbb{R}^2$ centrada en el punto $(0,1)$, es decir,

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 = 1\right\},$$

y consideramos el espacio métrico $Y = \mathcal{S} \setminus \{(0,2)\}$ con la métrica d inducida por (cualquier norma de) $\mathbb{R}^2$. Dicho espacio no es completo (ya que Y no es cerrado en $\mathbb{R}^2$, véase Proposición 2.4.3). Sin embargo, (Y, d) es homeomorfo a $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ (que es completo). En efecto, definimos la función $f : \mathbb{R} \to \mathcal{S} \setminus \{(0,2)\}$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$, entrega la intersección entre $\mathcal{S} \setminus \{(0,2)\}$ y la recta que pasa por $(t,0)$ y $(0,2)$ (Figura 2.2). La formula

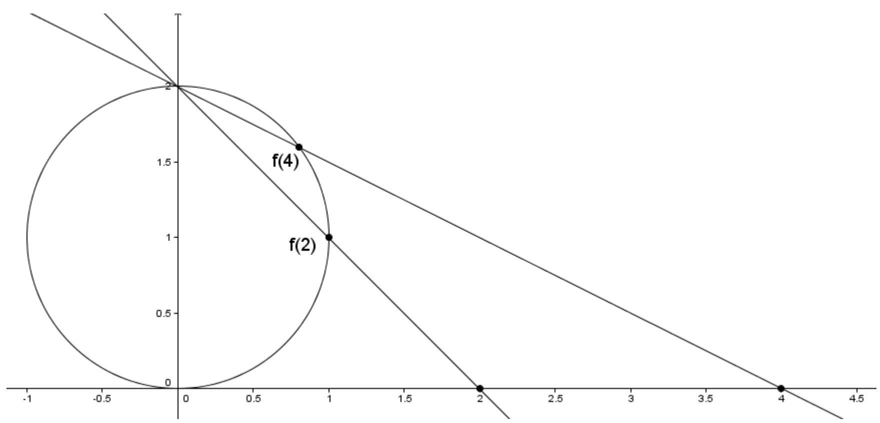

Figura 2.2: Definición de la función f.

explicita que define la función es

$$f(t) = \left(\frac{4t}{4+t^2}\,,\ 2 - \frac{8}{4+t^2}\right).$$

Es fácil convencerlos (mirando el dibujo) que f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son funciones continuas. Por otra parte, f^{-1} no respecta las sucesiones de Cauchy: En efecto, la sucesión $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$ de $\mathbb{R}$ es la imagen por f^{-1} de la sucesión $y_n = f(x_n)$ que es de Cauchy en Y (ya que es convergente en $\mathcal{S} = \mathrm{adh}(Y)$). En particular, f no es un homeomorfismo uniforme. $\square$

2.5.2. Distancias equivalentes

Sea $X \neq \varnothing$ y consideramos el conjunto

$$\mathcal{D} := \{\, d : X \times X \mapsto \mathbb{R} \mid \quad d \quad \text{distancia}\}$$

de todas las distancias en X. Equipamos este conjunto con una relación de preorden como sigue: Sean d_1, d_2 dos distancias en X, definiendo las topologías $\Im_1$ e $\Im_2$ respectivamente. Entonces:

$$d_1 \preceq d_2 \quad \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \Im_1 \subseteq \Im_2. \tag{2.53}$$

Es inmediato comprobar que (2.53) define efectivamente una relación de preorden en $\mathcal{D}$. Una descripción alternativa de esta relación de preodren, basada en la Proposición 2.3.5, es la siguiente:

$$d_1 \preceq d_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{id} : (X, d_2) \mapsto (X, d_1) \quad \text{continua} \tag{2.54}$$

Proposición 2.5.6 (Orden en distancias) *Sean d_1 y d_2 dos distancias en X. Los siguientes son equivalentes:*

(i) $d_1 \preceq d_2$ *(es decir, $\Im_1 \subseteq \Im_2$).*

(ii) Las bolas abiertas de la métrica d_1 son abiertos (también) para la métrica d_2.

(iii) Para todo $\varepsilon > 0$ y $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que

$$B_{d_2}(x, \delta) \subseteq B_{d_1}(x, \varepsilon).$$

DEMOSTRACIÓN: (i) $\Longrightarrow$ (ii) es obvio, mientras que (ii) $\Longrightarrow$ (iii) es una consecuencia de la definición de un conjunto abierto (véase Definición 2.2.4). Vamos a mostrar que (iii) $\Longrightarrow$ (i). En efecto, sea $\mathcal{U} \in \Im_1$ y $x \in \mathcal{U}$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{d_1}(x, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}$. Utilizando (iii) se deduce que existe $\delta > 0$ tal que $B_{d_2}(x, \delta) \subseteq \mathcal{U}$, por lo tanto $\mathcal{U} \in \Im_2$.$\square$

Como consecuencia del (iii) de la proposición anterior deducimos lo siguiente:

$$\exists M > 0,\ \forall x, y \in X \ :\ d_1(x, y) \le M\, d_2(x, y) \quad \Longrightarrow \quad d_1 \preceq d_2 \tag{2.55}$$

La anterior implicancia es una equivalencia en el caso particular que X es un espacio vectorial y que las distancias d_1, d_2 provienen de normas.

Proposición 2.5.7 (Orden en normas) *Sean N_1, N_2 dos normas en un espacio vectorial X y sean d_1, d_2 las distancias asociadas (véase (2.1)). Entonces los siguientes son equivalentes.*

(i) $d_1 \preceq d_2$ *(es decir, cada abierto de* N_1 *es abierto de* N_2*).*

(ii) Existe $M > 0$ *tal que para todo* $x \in X$*:*

$$N_1(x) \leq M\, N_2(x).$$

DEMOSTRACIÓN: (i) $\Longrightarrow$ (ii). Denotemos por $B_i(x,r)$ la bola de centro x y de radio $r>0$ de la norma N_i, y por $\Im_i$ la topología en X definida por la distancia d_i, $i \in \{1,2\}$. Entonces por la hipótesis, $B_1(0,1) \in \Im_2$, es decir, existe $\delta > 0$ tal que $B_2(0,\delta) \subseteq B_1(0,1)$, o de forma equivalente, para todo $x \in X$:

$$N_2(x) < \delta \quad \Longrightarrow \quad N_1(x) < 1. \tag{2.56}$$

Mostramos que (ii) se cumple con $M = \delta^{-1}$. Supongamos por contradicción que existe $\bar{x} \neq 0$ tal que $N_1(\bar{x}) > \delta^{-1} N_2(\bar{x})$. Entonces definimos

$$\delta_n := \delta - \frac{1}{n}, \qquad \text{luego} \quad \bar{u}_n := \frac{\delta_n\, \bar{x}}{N_2(\bar{x})}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como $N_2(\bar{u}_n) = \delta_n < \delta$, se deduce $N_1(\bar{u}_n) < 1$, es decir, $N_2(\bar{x}) > \delta_n\, N_1(\bar{x})$. Tomando el límite $n \to \infty$, se obtiene $N_2(\bar{x}) \geq \delta\, N_1(\bar{x})$, lo que contradice nuestra hipótesis.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Tomando $\delta < \varepsilon/M$ deducimos para todo $y \in X$ que

$$\Big(y \in B_2(x,\delta) \iff \Big)\ \ N_2(x-y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad N_1(x-y) < \varepsilon \ \ \Big(\iff y \in B_1(x,\varepsilon)\Big).$$

Lo anterior muestra que (iii) de la Proposición 2.5.6 se cumple, por lo tanto $d_1 \preceq d_2$.□

En la linea de la Observación 1.2.5 decimos que dos distancias son *equivalentes* si se cumple lo siguiente (véase también (1.1)):

$$d_1 \sim d_2 \quad \underset{\text{def}}{\iff} \quad \begin{cases} d_1 \preceq d_2 \\ d_2 \preceq d_1 \end{cases} \quad \iff \quad \mathrm{id} : (X, d_1) \mapsto (X, d_2) \quad \text{homeomorfismo} \tag{2.57}$$

En la misma línea de razonamiento, llamaremos dos distancias d_1 y d_2 *uniformemente equivalentes* (respectivamente, Lipschitz equivalentes), y anotaremos $d_1 \sim_{\mathrm{unif}} d_2$ (respectivamente, $d_1 \sim_{\mathrm{Lip}} d_2$), si $\mathrm{id} : (\mathrm{X}, \mathrm{d}_1) \mapsto (\mathrm{X}, \mathrm{d}_2)$ es un homeomorfismo uniforme (respectivamente, bi-Lipschitz).

Combinando los resultados anteriores se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 2.5.8 (Equivalencia de distancias) *Sean d_1, d_2 dos distancias en X. Consideramos las siguientes aserciones:*

(i) $(d_1 \sim_{\text{Lip}} d_2)$. *Existen constantes $k, M > 0$ tales que para todo $x, y \in X$ se tiene que*

$$k\, d_2(x,y) \le d_1(x,y) \le M\, d_2(x,y),$$

$$\textit{es decir:} \quad \mathrm{id} : (\mathrm{X}, \mathrm{d}_1) \mapsto (\mathrm{X}, \mathrm{d}_2) \quad \textit{es un homeomorfismo bi-Lipschitz.}$$

(ii) $(d_1 \sim_{\text{unif}} d_2)$. *Las distancias d_1, d_2 son uniformemente equivalentes, es decir:*

$$\mathrm{id} : (\mathrm{X}, \mathrm{d}_1) \mapsto (\mathrm{X}, \mathrm{d}_2) \quad \textit{es un homeomorfismo uniforme.}$$

(iii) $(d_1 \sim d_2)$. *Las distancias d_1, d_2 son equivalentes ($\Im_1 = \Im_2$), es decir:*

$$\mathrm{id} : (\mathrm{X}, \mathrm{d}_1) \mapsto (\mathrm{X}, \mathrm{d}_2) \quad \textit{es un homeomorfismo.}$$

Entonces se tiene que (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii).

Si X es un espacio vectorial y las distancias provienen de normas, entonces las tres aserciones son equivalentes.

Observación 2.5.9 (Equivalencia de normas) Un homeomorfismo bi-Lipschitz entre espacios normados que es lineal, se dice un isomorfismo lineal. La segunda parte de la Proposición 2.5.8 se puede reformular de la siguiente manera: sean N_1, N_2 dos normas en un espacio vectorial X. Consideramos la función identidad $\mathrm{id} : (\mathrm{X}, \mathrm{N}_1) \mapsto (\mathrm{X}, \mathrm{N}_2)$. Entonces: id es un homeomorfismo lineal *si y sólo si* es un isomorfismo lineal.

Es importante destacar que dos métricas equivalentes d_1, d_2 en X tienen las mismas sucesiones convergentes, pero no necesariamente las mismas sucesiones de Cauchy. En particular es posible que X sea completo con una distancia d_1, pero no con otra distancia d_2 equivalente a la distancia d_1. En este caso, tenemos por la (2.57) que la función identidad $\mathrm{id} : (\mathrm{X}, \mathrm{d}_1) \mapsto (\mathrm{X}, \mathrm{d}_2)$ es un homeomorfismo, sin ser un homeomorfismo uniforme.

Ejemplo 2.5.10 Revisitamos el Ejemplo 2.5.5. En aquel ejemplo hemos establecido un homeomorfismo $f : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{S} \setminus \{(0,2)\}$ entre el espacio completo $\mathbb{R}$ y el espacio $\mathcal{S} \setminus \{(0,2)\}$ (que claramente no es completo). Dado que f es una biyección, podemos transferir la métrica d del espacio $\mathcal{S}$ al espacio $\mathbb{R}$ como sigue:

$$\begin{cases} \widehat{d} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+ \\ \widehat{d}(t,s) := d(f(t), f(s)), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Utilizando el hecho que f es un homeomorfismo entre $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ y $(\mathcal{S}\setminus\{(0,2)\}, d)$, mostramos fácilmente que $\widehat{d}$ es una distancia equivalente a la distancia habitual de $\mathbb{R}$, con la cual $(\mathbb{R}, \widehat{d})$ ya no es completo: en efecto, al cambiar la distancia de $\mathbb{R}$ por la distancia $\widehat{d}$ transferida por $\mathcal{S}$, la función f se transforma automáticamente en una isometría, y un espacio completo no puede ser isométrico a un espacio no completo. $\square$

La condición (ii) de la Proposición 2.5.8 garantiza que las distancias tienen las mismas sucesiones de Cauchy y las mismas sucesiones convergentes, mientras que la condición (iii) solo respecta las sucesiones convergentes. Con el ejemplo anterior hemos mostrado que en general (iii) no implica (ii).

Notamos por último que también dos distancias uniformemente equivalentes (es decir, que respectan a la vez las sucesiones convergentes y las sucesiones de Cauchy, y por lo tanto la completitud de X) no respectan necesariamente los conjuntos acotados. En otras palabras, un homeomorfismo uniforme no tiene porque ser bi-Lipschitz. Esto será una consecuencia del siguiente Corolario 2.5.12 (considerando una distancia inicial d no acotada). Citamos primero el siguiente resultado.

Proposición 2.5.11 (Construir distancias equivalentes) *Sea (X, d) un espacio métrico y $\varphi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ una función concava, creciente con $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Entonces $\varphi \circ d$ es una distancia en X uniformemente equivalente a la distancia d.*

DEMOSTRACIÓN: Notemos que φ es localmente invertible y bi-continua en 0. Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$ y pongamos $\alpha := d(x_1, x_2)$, $\beta := d(x_2, x_3)$ y $\gamma := d(x_1, x_3)$. Como d es una distancia, se tiene que $\alpha + \beta \geq \gamma$, y dado que φ es creciente, se deduce que $\varphi(\alpha + \beta) \geq \varphi(\gamma)$. Por lo tanto, para mostrar que $\varphi \circ d$ es una distancia, es suficiente mostrar que $\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) \geq \varphi(\alpha + \beta)$. Definimos:

$$\lambda := \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad \mu := \frac{\beta}{\alpha + \beta} \qquad \text{(de forma que } 0 \leq \lambda, \mu \leq 1, \quad \lambda + \mu = 1).$$

Utilizando la concavidad de φ y el hecho que $\varphi(0) = 0$ se deduce:

$$\begin{cases} \varphi(\alpha) = \varphi(\lambda(\alpha + \beta) + \mu \cdot 0) \geq \lambda\varphi(\alpha + \beta) + \mu\,\varphi(0) = \lambda \cdot \varphi(\alpha + \beta), \\ \varphi(\beta) = \varphi(\lambda \cdot 0 + \mu(\alpha + \beta)) \geq \lambda\varphi(0) + \mu\,\varphi(\alpha + \beta) = \mu \cdot \varphi(\alpha + \beta). \end{cases}$$

Sumando las dos desigualdades obtenemos el resultado deseado, así que $\varphi \circ d$ define una distancia en X. La continuidad de φ y de φ^{-1} en 0 garantiza que una sucesión $(x_n)_n$ de X es d-convergente (respectivamente, d-Cauchy), si y sólo si es $(\varphi \circ d)$–convergente (respectivamente, $(\varphi \circ d)$–Cauchy). $\square$

Corolario 2.5.12 (Distancias uniformemente equivalentes acotadas) *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces las funciones*

$$d_1(x,y) := \text{mín}\,\{1,\, d(x,y)\}, \qquad d_2(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

son distancias acotadas y uniformemente equivalentes a la distancia d (es decir, respectan a la vez la topología y las sucesiones de Cauchy). En particular, para todo $i \in \{1,2\}$ se tiene que

$$(X,d) \quad \textit{es completo} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (X,d_i) \quad \textit{es completo.}$$

DEMOSTRACIÓN: Es inmediato ver que d_1 es una distancia y que tiene las mismas sucesiones convergentes y de Cauchy con d (por lo tanto, es uniformemente equivalente a d). El hecho que d_2 es una distancia uniformemente equivalente a la distancia d es consecuencia de la Proposición 2.5.11. □

2.5.3. Espacio producto de espacios métricos

En esta sección consideramos una familia numerable de espacios métricos $(X_i, \tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y el espacio producto $X := \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ (definido en la Sección 1.5). Nuestro objetivo es definir una métrica (y por lo tanto, una topología) en X de forma natural, que llamaremos *métrica producto.*

El primer paso es considerar para cada $i \in \mathbb{N}$ una distancia σ_i acotada y uniformemente equivalente a la distancia inicial τ_i, luego poner un peso decreciente en cada $i \in \mathbb{N}$ para asegurar que se obtiene una serie convergente. Veamos los detalles en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.5.13

(Espacio producto) Sean $(X_i, \tau_i)_{i=1}^{\infty}$ espacios métricos. Definimos en el espacio producto

$$\widehat{X} = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$$

la siguiente distancia:

$$\widehat{\sigma}(\widehat{x},\widehat{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_i(x(i),y(i))}{2^i}, \qquad \text{donde} \quad \sigma_i = \text{mín}\{1,\tau_i\} \quad (i\in\mathbb{N}). \tag{2.58}$$

El espacio métrico $(\widehat{X}, \widehat{\sigma})$ se llama espacio *producto de espacios métricos.*

La siguiente proposición, caracteriza la convergencia en el espacio producto.

Proposición 2.5.14 (Convergencia en el espacio producto) *Sea* $(\widehat{X}, \widehat{\sigma})$ *el espacio producto de los espacios* $(X_i, \sigma_i)_{i=1}^{\infty}$*, definido por* (2.58)*. Sea* $\mathcal{X}_n = (x(1)_n, \ldots, x(i)_n, \ldots)$ *una sucesión* $(\mathcal{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\widehat{X}$*. Entonces*

$$\mathcal{X}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{X} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall i \in \mathbb{N}: \quad x(i)_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x(i).$$

DEMOSTRACIÓN: $(\Rightarrow)$ Fijemos $i \in \mathbb{N}$. Entonces se deduce directamente de (2.58) que

$$\sigma_i(x(i)_n, x(i)) \leq 2^i \cdot \widehat{\sigma}(x_n, x).$$

Tomando el límite $n \to \infty$, se tiene que $2^i \cdot \widehat{\sigma}(x_n, x) \to 0$, demostrando lo pedido.

$(\Leftarrow)$ Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i>i_0} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otra parte, para cada $i \in \{1, \ldots, i_0\}$, y por

$$\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{2K}, \quad \text{donde} \quad K = \sum_{i=1}^{i_0} \frac{1}{2^i}.$$

Como para cada $i \leq i_0$ se tiene que $\sigma_i(x(i)_n, x(i)) \to 0$, se deduce que existe $n_i \in \mathbb{N}$, tal que para cada $n \geq n_i$, $\sigma_i(x(i)_n, x(i)) < \varepsilon_1$. Sea $N_0 = \text{máx}\{n_1, \ldots, n_{i_0}\}$. Se deduce que para cada $n \geq N_0$,

$$\sum_{i=1}^{i_0} \frac{\sigma_i(x(i)_N, x(i))}{2^i} \leq \varepsilon_1 K = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalmente, para todo $n \geq N_0$ se tiene que

$$\widehat{\sigma}\left(\mathcal{X}_n, \mathcal{X}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_i(x(i)_n, x(i))}{2^i} = \sum_{i=1}^{i_0} \frac{\sigma_i(x(i)_n, x(i))}{2^i} + \sum_{i=i_0}^{\infty} \frac{\sigma_i(x(i)_n, x(i))}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

de donde se concluye que $\mathcal{X}_n \to \mathcal{X}$. $\square$

Observación 2.5.15 (i). **(Continuidad de proyecciones)** La proposición anterior nos dice en particular que las proyecciones

$$\begin{cases} \pi_i : \widehat{X} \mapsto X_i \\ \pi_i(\mathcal{X}) = x(i), \quad \mathcal{X} = (x(i))_{i\in\mathbb{N}} \in \widehat{X}, \end{cases}$$

son continuas, para todo $i \in \mathbb{N}$.
(ii). **(Producto vs Completitud)** Adaptando adecuadamente la demostración de la Proposición 2.5.14, obtenemos el siguiente resultado (recordamos que las distancias τ_i y σ_i son uniformemente equivalentes en X_i):

$$\{\widehat{X}_n\}_n \ \widehat{\sigma}\text{–Cauchy en } \widehat{X} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{N}: \ \{x(i)_n\}_n \ \sigma_i\text{–Cauchy en } X_i.$$

En particular,

$$(\widehat{X}, \widehat{\sigma}) \text{ es completo} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{N}: \ (X_i, \sigma_i) \text{ es completo.}$$

(iii) **(Descripción de las bolas en el producto)** Consideramos la bola abierta de centro $x = (x_1, x_2, \ldots)$ y de radio $\varepsilon > 0$. Entonces existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{i_0}} < \varepsilon \leq \frac{1}{2^{i_0-1}}.$$

Se deduce fácilmente que

$$\prod_{j=1}^{i_0} \{x(j)\} \times \prod_{j=i_0+1}^{\infty} X_j \subseteq B(x, \varepsilon).$$

2.5.4. Extensiones continuas

En esta sección trataremos el tema de extensión continua de una función $f : A \to Y$ que es continua en un subconjunto A de un espacio métrico X. Finalizaremos la sección con el Teorema de Mazurkiewicz, el cual nos entrega una caracterización interesante de los conjuntos G_δ de un espacio métrico completo.

Lema 2.5.16 (Conjuntos densos vs continuidad) *Sean (X, d), (Y, ρ) espacios métricos, $D \subseteq X$ denso, y $f : X \to Y$. Los siguientes son equivalentes:*

(i) la función $f : X \to Y$ es continua.

(ii) para todo $x \in X$ la función $f\big|_{D\cup\{x\}}$ es continua.

DEMOSTRACIÓN: La implicación (i)⇒(ii) es obvia.
(ii)⇒(i). Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión convergente hacía un punto $x \in X$. Dado que el conjunto D es denso en X, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos acercarnos al elemento x_n de dicha sucesión, por una sucesión $\{u(n)_m\}_{m\in\mathbb{N}}$. Es decir,

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists \{u(n)_m\}_{m\in\mathbb{N}}) \subseteq D\ :\quad u(n)_m \xrightarrow[m\to\infty]{} x_n.$$

Como $f\,\big|_{D\cup\{x_n\}}$ es continua, se tiene que $\rho(f(u(n)_m), f(x_n)) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $\varepsilon_1 = 1$, existe $m_1 \in \mathbb{N}$, tal que $d(u(1)_{m_1}, x_1) < 1$ y $\rho(f(u(1)_{m_1}), f(x_1)) < 1$. Luego, para $\varepsilon_2 := 1/2$, existe $m_2 > m_1$, tal que

$$d(u(2)_{m_2}, x_2) < 1/2 \qquad \text{y} \qquad \rho(f(u(2)_{m_2}, f(x_2)) < 1/2.$$

Tomando sucesivamente $\varepsilon_n := 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ y utilizando inducción, se construye una sucesión $\{u(n)_{m_n}\}_{m_n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ tal que

$$d(u(n)_{m_n}, x_n) < \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad \rho\left(f\left(u(n)_{m_n}\right), f\left(x_n\right)\right) < \frac{1}{n}.$$

Considerando la sucesión diagonal $y_k = u(k)_{m_k}$, se tiene entonces que

$$d(y_k, x_k) < \frac{1}{k} \qquad \text{y} \qquad \rho(f(y_k), f(x_k)) < \frac{1}{k}.$$

Por lo tanto

$$\{y_k\} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \qquad \text{luego} \qquad \rho(f(y_k), f(x_k)) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Se obtiene entonces que

$$\rho(f(x_k), f(x)) \leq \underbrace{\rho(f(x_k), f(y_k))}_{<\frac{1}{k}} + \underbrace{\rho(f(y_k), f(x))}_{\to 0},$$

de donde se concluye que $\{f(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \to f(x)$, es decir, la función f es continua. □

Como consecuencia del lema anterior obtenemos el siguiente resultado fundamental.

Corolario 2.5.17 (Extensión continua) *Sea (X, d) un espacio métrico, y sea (Y, ρ) un espacio métrico completo. Sea $A \subseteq X$ y $f : A \to Y$ continua. Entonces existe un conjunto $G \subseteq X$, que es G_δ tal que $A \subseteq G_\delta \subseteq \overline{A}$ y existe $\varphi : G \to Y$ extensión continua de f, es decir, $\varphi\,|_A = f$. Además, dicha extensión se define de forma única.*

DEMOSTRACIÓN: Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$G_n = \{x \in \overline{A} : \text{ existe } \delta_x > 0, \ \operatorname{diam}_\rho(f(B(x, \delta_x) \cap A)) < \frac{1}{n}\}.$$

Definimos

$$\mathcal{U}_n = \bigcup_{x \in \overline{A}} B(x, \delta_x), \quad \text{de forma que } \ G_n = \overline{A} \cap \mathcal{U}_n, \ n \in \mathbb{N}.$$

El conjunto

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \overline{A} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n \right)$$

es un conjunto G_δ (ya que el conjunto $\overline{A}$, siendo cerrado, es G_δ y que la intersección de dos conjuntos G_δ es G_δ). Por continuidad de f tenemos que $\operatorname{diam}_\rho f(B(x, \delta) \cap A) < 1/n$. Concluimos entonces que $A \subseteq G \subseteq \overline{A}$.

Sea $\varepsilon > 0$, sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/k < \varepsilon$. Consideremos dos sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ convergentes a $x \in G$. Como $x \in G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, existe $\delta_x > 0$, tal que

$$\operatorname{diam}_\rho(f(B(x, \delta_x) \cap A)) < \frac{1}{k} < \varepsilon,$$

de donde concluimos que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \ x_n, y_n \in B(x, \delta_x) \cap A \implies \rho(f(x_n), f(y_n)) < \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

En particular para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n, m \geq n_0$, se tiene que

$$\rho(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon, \quad \rho(f(y_n), f(y_m)) < \varepsilon \quad \text{y} \quad \rho(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon. \tag{2.59}$$

Se deduce que las sucesiones $f(x_n)_n$ y $f(y_n)_n$ son de Cauchy, y como Y es completo, se tiene que $f(x_n) \to y_1$, $f(y_n) \to y_2$ con $y_1, y_2 \in Y$. Por (2.59) se concluye que $y_1 = y_2$. Eso muestra que para cada $x \in G$ la función $f : G \mapsto Y$ restringida a $A \cup \{x\}$ es continua. Concluimos por el Lema 2.5.16 que $f : G \mapsto Y$ es una extensión continua (y necesariamente única) de la función $f : A \mapsto Y$. □

Observación 2.5.18 (Extensión continua en $\overline{A}$.) Utilizamos la notación del Corolario 2.5.17 y supongamos que $f : A \mapsto Y$ es uniformemente continua. En este caso, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $G_n = \overline{A}$, es decir $G = A$. Tomando

$\varepsilon = 1/2n$ deducimos

$$\exists \delta > 0, \ \forall x_1, x_2 \in A \ d(x_1, x_2) < \delta \implies \rho(f(x_1), f(x_2)) < \frac{1}{2n}.$$

Si $x \in \overline{A}$, tomando $\delta_x := \delta/2$ obtenemos $\operatorname{diam}_\rho(f(B(x,\delta_x) \cap A)) < 1/n$, por lo tanto f es continua en $\overline{A}$. □

Notemos por último que si f no es uniformemente continua, entonces G puede ser subconjunto estricto de $\overline{A}$.

Ejemplo 2.5.19 (Inexistencia de extensión continua) Sea $A = (0,1]$, $X = Y = \mathbb{R}$ y considérense la función

$$f(t) = \sin(1/t), \quad t \in A.$$

Entonces $G = A \subsetneq \overline{A}$, es decir f no admite ninguna extensión continua en $\overline{A}$.

2.5.5. El Teorema de Mazurkiewicz

El siguiente resultado nos ayudará a demostrar un importante resultado más adelante, conocido como el Teorema de Mazurkiewicz.

Proposición 2.5.20 (Conjuntos abiertos vs completitud) *Sea (X,d) un espacio métrico completo y sea $\mathcal{U} \subsetneq X$ un conjunto abierto. Entonces el conjunto $\mathcal{U}$ admite una distancia*

$$\rho : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+,$$

equivalente a la restricción de la distancia d sobre $\mathcal{U}$ y tal que el espacio $(\mathcal{U},\rho)$ es completo.

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \frac{1}{d(x, X \setminus \mathcal{U})}$$

y sea

$$\begin{cases} \rho : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R} \\ \rho(x,y) = d(x,y) + |f(x) - f(y)|. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que ρ es una distancia en $\mathcal{U}$. Veremos a continuación que $(\mathcal{U},\rho)$ es completo y $d \sim \rho$ sobre $\mathcal{U}$.

Paso 1. Veamos que $d \sim \rho$.

Como $d(x,y) \leq \rho(x,y)$, se tiene que $\Im_d \subseteq \Im_\rho$. Sea $x \in \mathcal{U}$, $\varepsilon > 0$. Como f es continua, existe $\delta_1 > 0$ tal que $d(x,y) < \delta_1$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$.
Tomando $\delta_1 < \text{mín}\{\delta, \varepsilon/2\}$, tenemos que

$$\rho(x,y) = d(x,y) + |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

es decir, existe $\delta > 0$ tal que $B_d(x,\delta) \subseteq B_\rho(x,\varepsilon)$, por lo tanto $\Im_\rho \subseteq \Im_d$.

Paso 2. $(\mathcal{U}, \rho)$ es completo.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{U},\rho)$. Como para todo $x, y \in \mathcal{U}$, se tiene que $d(x,y) \leq \rho(x,y)$, se deduce que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (X,d) (que es un espacio completo). Por lo tanto, existe $\bar{x} \in X$ tal que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x} \in X$. Veremos ahora que $\bar{x} \in \mathcal{U}$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es ρ-Cauchy, entonces

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq n_0)\ \ |f(x_n) - f(x_m)| \leq \rho(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

por lo que

$$\left|\frac{1}{d(x_n, X\setminus\mathcal{U})} - \frac{1}{d(x_m, X\setminus\mathcal{U})}\right| < \varepsilon \implies \left|\frac{d(x_m, X\setminus\mathcal{U}) - d(x_n, X\setminus\mathcal{U})}{d(x_n, X\setminus\mathcal{U})}\right| < \varepsilon\, d(x_m, X\setminus\mathcal{U}).$$

Tomando límite cuando $m \to \infty$, se deduce que

$$\left|\frac{d(x_n, X\setminus\mathcal{U}) - d(\bar{x}, X\setminus\mathcal{U})}{d(x_n, X\setminus\mathcal{U})}\right| < \varepsilon \cdot d(\bar{x}, X\setminus\mathcal{U}).$$

Se deduce del anterior que $d(\bar{x}, X\setminus\mathcal{U}) > 0$, es decir, $\bar{x} \in \mathcal{U}$. Por el Paso 1, $d \sim \rho$ en $\mathcal{U}$ por lo tanto deducimos que $\rho(x_n, \bar{x}) \to 0$. Concluimos entonces que $(\mathcal{U},\rho)$ es completo. $\square$

A continuación enunciaremos el Teorema de Mazurkiewicz.

TEOREMA 2.5.21

(Teorema de Mazurkiewicz) Sea (X,d) espacio métrico completo y sea $A \subseteq X$. Los siguientes son equivalentes:

(i) Existe una distancia τ en A, equivalente a la restricción de la distancia d en A tal que (A,τ) es completo.

(ii) El conjunto A es un conjunto G_δ en X.

DEMOSTRACIÓN: (i)$\Rightarrow$(ii). Por nuestra hipótesis, la función identidad $\mathrm{id} : (A, d) \to (A, \tau)$ es un homeomorfismo. Por el teorema de extensión continua (Corolario 2.5.17) existe $G \subseteq X$ (conjunto G_δ), tal que $A \subseteq G \subseteq \overline{A}$, y existe una función $\varphi : (G, d) \to (A, \tau)$ continua tal que $\varphi\,|_A = \mathrm{id}$. Mostraremos que $G = A$.
Sea $x \in G$. Como $G \subseteq \overline{A}$, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $d(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Como φ es continua, entonces $\varphi(x_n) = x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(x) \in A$ (con la métrica τ). Dado que las distancias τ y d son equivalentes en A, se tiene que $d(x_n, \varphi(x)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Dado que también $d(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, se deduce que $x = \varphi(x)$ por la unicidad del límite, es decir, $x \in A$. Esto muestra que $A = G$, por lo tanto, es un conjunto G_δ.

(ii)$\Rightarrow$ (i). Como A es G_δ, entonces podemos representar A como intersección numerable de abiertos, eso es:

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i, \quad \text{con} \quad \mathcal{U}_i \quad \text{abierto.}$$

Por la Proposición 2.5.20, para todo $i \in \mathbb{N}$, existe $\tau_i \sim d_{\mathcal{U}_i\times\mathcal{U}_i}$ tal que $(\mathcal{U}_i, \tau_i)$ completo. Sea $\sigma_i = \min\{1, \tau_i\}$. Por la Proposición 2.5.12, se tiene que $\sigma_i \sim \tau_i$ y además (U_i, σ_i) es completo.

Paso 1. Sea $\widehat{G} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i$, con la métrica $\widehat{\sigma}(\widehat{x}, \widehat{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{\sigma_i(x_i, y_i)}{2^i}$. Por la Observación 2.5.15(ii) se deduce que $(\widehat{G}, \widehat{\sigma})$ es completo.

Paso 2. Definimos la función

$$\begin{array}{rccl} \phi : & A & \hookrightarrow & \widehat{G} \\ & x & \mapsto & \phi(x) = (x, x, \ldots, x, \ldots). \end{array}$$

– Mostramos que ϕ es continua: Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ y $x \in A$ tal que $d(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Como las métricas d, τ_i y σ_i son equivalentes en $\mathcal{U}_i$, se deduce que $\sigma_i(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Por la Proposición 2.5.14, se tiene que

$$\widehat{\sigma}(\phi(x_n), \phi(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_i(x_n, x)}{2^i} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,, \quad \text{es decir,} \quad \phi(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi(x) \in \widehat{G}.$$

– Veamos que $\phi(A) \subseteq \widehat{G}$ es cerrado: Sea $\{\phi(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \phi(A)$ tal que $\phi(x_n) \to \widehat{z} \in \widehat{G}$. Por la continuidad de las proyecciones, *c.f.* Observación 2.5.15(i), se tiene

$$\pi_i(\phi(x_n)) := x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_i = \pi_i(\widehat{z}), \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Se deduce que:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_i \quad \text{es decir} \quad z = z_i \in \mathcal{U}_i, \quad \text{para todo} \quad i \in \mathbb{N},$$

es decir, $z \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{U}_i = A$ y por lo tanto, $\widehat{z} = \phi(z) \in \phi(A)$.
Concluimos que la función $\phi : A \to \phi(A) \subseteq \widehat{G}$ es una biyección continua, luego

$$\begin{cases} \phi^{-1} : \phi(A) \to A, \\ \phi^{-1}(\phi(x)) = x \end{cases} Complecin$$

es continua, ya que $\phi(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi(x) \implies x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Por lo tanto ϕ^{-1} es continua, de donde se concluye que el espacio métrico (A, d) es homeomorfo al espacio métrico completo $(\phi(A), \widehat{\sigma})$ (subespacio cerrado del espacio métrico completo $(\widehat{G}, \widehat{\sigma})$). Definiendo

$$\tau(x, y) := \widehat{\sigma}(\phi(x), \phi(y)), \quad \text{para todo} \quad x, y \in A,$$

se tiene que $d \sim \tau$, luego que (A, τ) es isométrico al espacio $(\phi(A), \widehat{\sigma})$, y por lo tanto, es completo. □

2.6. Compleción de un espacio métrico

El espacio $\mathbb{Q}$ de los números racionales, y el espacio $c_{00}(\mathbb{N})$ de las sucesiones *finalmente nulas* son ejemplos típicos de espacios métricos que no son completos. Estos espacios, siendo subespacios naturales de los espacios métricos completos $\mathbb{R}$ y respectivamente $c_0(\mathbb{N})$ (o $\ell^\infty(\mathbb{N})$), se pueden *completar* en espacios métricos completos tomando su clausura en dichos espacios ambientes. Una pregunta natural surge: ¿existe siempre la Compleción de un espacio métrico incompleto? En esta sección nos dedicamos en contestar a esta pregunta.

Definición 2.6.1

(Compleción) Sea (X, d) un espacio métrico. Un espacio métrico completo (Y, ρ) se dice *Compleción* de (X, d) si existe $i : X \hookrightarrow Y$ inyección isométrica tal que $i(X) \subseteq Y$ es denso.

Observación 2.6.2 (Unicidad de la Compleción) Si $i_1 : X \hookrightarrow Y$, con $i_1(X) \subseteq Y$ denso y $i_2 : X \hookrightarrow Z$, con $i_2(X) \subseteq Z$ denso, entonces la función $\varphi : i_1(X) \to i_2(X)$ tal que $\varphi(y) := i_2(i_1^{-1}(y))$ es una isometría entre $i_1(X) \subseteq Y$ y $i_2(X) \subseteq Z$, y por lo tanto (*c.f.* Observación 2.5.18) se extiende de forma única a una función entre Y y Z. Es fácil ver que esta extensión define una isometría entre Y y Z, lo que muestra la unicidad de la Compleción bajo isometrías.

Ejemplo 2.6.3 (i). El espacio $\mathbb{R}$ de los números reales es la Compleción de $\mathbb{Q}$.
(ii). Sea d_p la distancia en $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ definida en el Ejemplo 2.1.15(iv). La Compleción de $(\mathbb{Q}, d_p)$, que se denota como $\mathbb{Q}_p$, se le conoce como el conjunto de los *números p-ádicos*.
(iii). Sea $\mathcal{C}([0,1])$ el espacio vectorial de las funciones continuas en $[0,1]$, equipado con la distancia d_p que proviene de la norma $||\cdot||_p$ (véase Ejemplo 2.1.8(III)). Dicho espacio no es completo, y su Compleción se le conoce como el espacio $L^p([0,1], \mathcal{B}, \mu)$, espacio que se estudia más a profundidad en la Teoría de la Medida.

A continuación necesitaremos el siguiente lemma.

Lema 2.6.4 *Sea (X, d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de Cauchy en (X, d). Entonces la sucesión $\beta_n := d(x_n, y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, es de Cauchy en $\mathbb{R}$ (por lo tanto converge, dado que $\mathbb{R}$ es completo).*

DEMOSTRACIÓN: Debido a la desigualdad triangular se tiene que

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, y_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n),$$

por lo tanto (intercambiando n y m) obtenemos

$$|\beta_n - \beta_m| = |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy se deduce fácilmente que la sucesión $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. □

Consideramos ahora el espacio

$$\mathcal{B} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es de Cauchy}\} \subseteq X^{\mathbb{N}}. \tag{2.60}$$

Utilizando el Lemma 2.6.4, definimos en $\mathcal{B}$ la pseudo-distancia

$$\widetilde{d}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{i\to\infty} d(x_i, y_i) \in \mathbb{R}.$$

La relación

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \Longleftrightarrow \quad \widetilde{d}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = 0,$$

es una relación de equivalencia. Luego $\widehat{X} = (\mathcal{B}/\sim)$, con la distancia

$$\widehat{d}\left([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]\right) = \widetilde{d}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}), \tag{2.61}$$

es un espacio métrico, es decir, para cualquier espacio métrico (X, d), definimos el espacio $(\widehat{X}, \widehat{d})$, donde $\widehat{X} = \mathcal{B}/\sim$.

Teorema 2.6.5

El espacio $(\widehat{X}, \widehat{d})$ definido por (2.60), (2.61) es la Compleción de (X, d).

DEMOSTRACIÓN: Para cada $x \in X$ notamos por $\tilde{x}$ a la sucesión constante $x_n := x$, $n \in \mathbb{N}$, y definimos la función

$$\begin{cases} \varphi: & X & \hookrightarrow & \widehat{X} \\ & x & \mapsto & \varphi(x) = [(x, x, \ldots, x, \ldots)] = [\widetilde{x}]. \end{cases}$$

Se puede ver que $\widehat{d}(\varphi(x), \varphi(y)) = \widetilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{i\to\infty} d(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) = \lim_{i\to\infty} d(x, y) = d(x, y)$, por lo tanto la función es una inyección isométrica de X en $\widehat{X}$.

– Mostramos que $\varphi(X)$ es denso en $\widehat{X}$. En efecto, sea $\mathcal{X} \in \widehat{X}$, y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{X} = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ (clase de equivalencia de la sucesión $(x_n)_n$). Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$x_n \in X, \quad \text{con} \quad \varphi(x_n) = \tilde{x_n} = (x_n, x_n, \ldots, x_n, \ldots) \in \widehat{X},$$

luego

$$\widehat{d}(\varphi(x_n), \mathcal{X}) = \widetilde{d}(\tilde{x}_n, (x_i)_i) = \lim_{i\to\infty} d((\tilde{x}_n)_i, x_i) = \lim_{i\to\infty} d(x_n, x_i).$$

Como $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, i \geq n_0$ se tiene que $d(x_n, x_i) < \varepsilon$, por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{d}(\varphi(x_n), \mathcal{X}) = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{i\to\infty} d(x_n, x_i) \right) \leq \varepsilon.$$

Dado que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se deduce que $\lim_{n\to\infty} \widehat{d}(\varphi(x_n), \mathcal{X}) = 0$, por lo que $\varphi(X) \subseteq \widehat{X}$ es denso en $\widehat{X}$.

– Mostramos que $(\widehat{X}, d)$ es completo. Sea $(\mathcal{X}_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $\widehat{X}$, donde $\mathcal{X}_n = [(x_i)^n]$. Utilizando la densidad de $\varphi(X)$ en $\widehat{X}$, tenemos que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X : \widehat{d}([\tilde{x}_n], \mathcal{X}_n) < \frac{1}{n}.$$

Mostramos que $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy. En efecto,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) = \widetilde{d}([\tilde{x}_n], [\tilde{x}_m]) &\leq \widehat{d}([\tilde{x}_n], \mathcal{X}_n) + \widehat{d}(\mathcal{X}_n, \mathcal{X}_m) + \widehat{d}(\mathcal{X}_m, [\tilde{x}_m]) \\ &\leq \tfrac{1}{n} + \widehat{d}(\mathcal{X}_n, \mathcal{X}_m) + \tfrac{1}{m} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Eso muestra que $(x_n)_n \in \mathcal{B}$. Su clase de equivalencia $\mathcal{X} = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \widehat{X}$ es el candidato para ser el límite de la sucesión de Cauchy $\mathcal{X}_n$ de $\widehat{X}$. Veamos que efectivamente esto es el caso:

$$\begin{aligned}\widehat{d}(\mathcal{X}_n,\mathcal{X}) &\le \widehat{d}(\mathcal{X}_n,[\tilde{x}_n])+\widehat{d}([\tilde{x}_n],\mathcal{X} \le \tfrac{1}{n}+\widetilde{d}(\tilde{x_n},(x_n))\\ &\le \tfrac{1}{n}+\lim_{i\to\infty} d((\tilde{x}_n)_i,(x_n)_i) \le \tfrac{1}{n}+\lim_{i\to\infty} d(x_n,x_i).\end{aligned}$$

Sea $\varepsilon>0$ arbitrario, y $n_0>2/\varepsilon$ tal que para todo $n,i\ge n_0$ se tiene que $d(x_n,x_i)<\varepsilon/2$. Se deduce que $\lim_{i\to\infty} d(x_n,x_i)\le\varepsilon/2$. Concluimos que para todo $n\ge n_0$ se tiene que

$$\widehat{d}(\mathcal{X}_n,\mathcal{X})\le\frac{1}{n}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Esto muestra que $(\widehat{X},\widetilde{d})$ es completo y termina la demostración. $\square$

2.7. Compacidad en Espacios Métricos

En esta sección definimos la noción de *compacidad* en un espacio métrico y veremos el teorema fundamental que caracteriza de manera fuerte a los conjuntos compactos de un espacio métrico. Empezaremos con la siguiente definición.

Definición 2.7.1

(Recubrimiento abierto) Sea (X,d) un espacio métrico. Notemos por $\Im_X$ la topología de X determinada por la distancia d. Una familia $\mathcal{G}\subseteq\Im_X$ de abiertos se dice un *recubrimiento abierto* de un conjunto $K\subseteq X$, si

$$K\subseteq\bigcup_{\mathcal{U}\in\mathcal{G}}\mathcal{U}.$$

A partir de la noción del recubrimiento, definimos los conjuntos compactos.

Definición 2.7.2

(Conjunto compacto) Sea (X,d) un espacio métrico. Un conjunto $K\subseteq X$ se dice *compacto*, si cada recubrimiento abierto admite un subrecubrimiento finito.

Es inmediato que unión finita de conjuntos compactos es un conjunto compacto. Veamos a continuación unos ejemplos que ilustran como funciona la definición de compacidad en la práctica.

Ejemplo 2.7.3 (i). El conjunto $\mathbb{R}$ no es compacto.

Efectivamente el recubrimiento $\mathbb{R}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(-n,n)$ no admite subrecubrimientos finitos.

(ii). El conjunto $\mathbb{N}$ no es compacto.

Efectivamente, es suficiente considerar el recubrimiento $\mathbb{N}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(n-\frac{1}{\varepsilon},n+\frac{1}{\varepsilon})$.

(iii). El conjunto $[0,1)$ no es compacto.

En efecto, consideramos el recubrimiento $[0,1)\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n})$ y vemos que no tiene subrecubrimiento finito.

(iv). Consideremos la sucesión $x_n=1/n$, $n\in\mathbb{N}$. Entonces el conjunto

$$K=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$$

es compacto.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de K. Como $0\in K$, existe $i_0\in\mathcal{U}_{i_0}$ tal que $0\in\mathcal{U}_{i_0}$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$, tal que para cada $n>n_0$, se tiene que $x_n\in\mathcal{U}_{i_0}$. Además, para cada $j\in\{1,\ldots,n_0\}$, existe $\mathcal{U}_{i_j}$ con $x_j\in\mathcal{U}_{i_j}$. Por lo tanto $\{\mathcal{U}_{i_0},\mathcal{U}_{i_1},\ldots,\mathcal{U}_{i_{n_0}}\}$ es un recubrimiento finito de K. □

Observación 2.7.4 (Compacidad vs topología relativa) Sea $K\subseteq X$ y $\Im_K$ la topología relativa en K, es decir $\Im_K=\{\mathcal{V}=\mathcal{U}\cap K,\quad \mathcal{U}\in\Im_X\}$. Entonces:

$$K \text{ es } \Im_X\text{-compacto} \qquad\Longleftrightarrow\qquad K \text{ es } \Im_K\text{-compacto.}$$

DEMOSTRACIÓN: ($\Longrightarrow$). Sea $\{\mathcal{V}_i\}_{i\in I}\subseteq\Im_K : K\subseteq\bigcup_{i\in I}\mathcal{V}_i$. Luego para cada $i\in I$, existe $\mathcal{U}_i\in\Im_X : \mathcal{V}_i=\mathcal{U}_i\cap K$. Es obvio que $K\subseteq\bigcup_{i\in I}\mathcal{U}_i$ y como K es $\Im_X$-compacto, entonces $K\subseteq\bigcup_{j=1}^{m}\mathcal{U}_{i_j}$ y por lo tanto $K\subseteq\bigcup_{j=1}^{m}\mathcal{V}_{i_j}$.

($\Longleftarrow$). El argumento es análogo y se omite. □

Observamos que la propiedad anterior es puramente topológica: la demostración no utiliza la distancia d y sus propiedades, sino hace uso directo de las propiedades $(\Im_1)$–$(\Im_3)$ de una topología (véase Proposición 2.2.5). Lo mismo ocurre con la siguiente caracterización de la compacidad.

TEOREMA 2.7.5

(Caracterización dual de la compacidad) Sea (X,d) un espacio métrico. Los siguientes son equivalentes:

(i). El espacio X es compacto.

(ii). Cada familia de cerrados $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ que tiene la propiedad de intersección finita (PIF), tiene intersección no vacía.

DEMOSTRACIÓN: (i)$\Rightarrow$(ii). Sea $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ una familia de cerrados con la PIF y supongamos que $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \varnothing$. Entonces

$$\bigcup_{F\in\mathcal{F}} \underbrace{X \setminus F}_{\text{(abiertos)}} = X \implies \exists F_1, \ldots, F_m \subseteq \mathcal{F} \text{ tal que } \bigcup_{i=1}^{m}(X \setminus F_i) = X \implies \bigcap_{i=1}^{m} F_i = \varnothing,$$

lo cual contradice que $\mathcal{F}$ tiene la PIF.

(ii)$\Rightarrow$(i). Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I} \subseteq \Im_X$ tal que $X = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$. Tomando complemento se deduce que $\varnothing = \bigcap_{i\in I} \mathcal{U}_i^c$, por lo tanto la familia de cerrados $\mathcal{F} = \{\mathcal{U}_i^c : i \in I\}$ no tiene la PIF. Entonces existen $i_1, \ldots i_m \in I$ tales que $\bigcap_{j=1}^{m} \mathcal{U}_{i_j}^c = \varnothing$, y tomando complementos $\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{U}_{i_j} = X$. Se concluye que X es compacto. □

A continuación veremos algunas propiedades interesantes de los conjuntos compactos. Varias de estas propiedades –en particular la siguiente– son de carácter topológico, otras (tienen sentido o) son válidas en espacios métricos.

Proposición 2.7.6 (Subconjunto cerrado de compacto es compacto) *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $K \subseteq X$ un conjunto cerrado. Entonces K es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I} \subseteq \Im_X$ un recubrimiento de K, es decir, $K \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$. Definimos $\mathcal{V} = X \setminus K \in \Im_X$, y obtenemos un recubrimiento de X, es decir:

$$X = K \cup (X \setminus K) = \bigcup_{i\in I} (\mathcal{U}_i \cup \mathcal{V}).$$

Como X es compacto, existen $i_1, \ldots i_m \in I$ de forma que $X = \mathcal{U}_{i_1} \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{i_m} \cup \mathcal{V}$. Entonces $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{U}_{i_j}$, es decir K es compacto. □

El siguiente resultado parece depender de la distancia. Como veremos, la demostración utilizará explícitamente la distancia. Sin embargo, la misma demostración se puede volver a redactar en términos topológicos, basada en las propiedades $(\Im_1)$–$(\Im_3)$ de los conjuntos abiertos, más la llamada propiedad de Hausdorff. (Dejamos como ejercicio al lector de redactar una demostración topológica.)

Proposición 2.7.7 (Compacto $\implies$ cerrado) *Sea (X,d) un espacio métrico y sea $K \subseteq X$ compacto. Entonces K es un conjunto cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Mostraremos que el complemento $X \setminus K$ de K es un conjunto abierto. Sea $y \in X \setminus K$. Entonces para todo $x \in K$, tomando $\delta_x = r_x = d(x,y)/3$, se tiene $B(x,\delta_x) \cap B(y,r_x) = \varnothing$ (propiedad de Hausdorff de un espacio métrico). Se define así un recubrimiento de K

$$\bigcup_{x\in K} B(x,\delta_x) \supseteq K.$$

Por compacidad, existe un subrecubrimiento finito: $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(x_j,\delta_{x_j})$.

Sea $r = \text{mín}\{r_{x_1},\dots,r_{x_m}\}$, se tiene que $B(y,r) \subseteq X \setminus K$, de donde se concluye que $X \setminus K$ es abierto. $\square$

El siguiente resultado, de carácter topológico, garantiza que la compacidad se preserva por funciones continuas.

Proposición 2.7.8 (Imagen continua de compacto es compacto) *Sean (X,d), (Y,ρ) espacios métricos, $f : X \to Y$ una función continua y $K \subseteq X$ un conjunto compacto. Entonces la imagen $f(K)$ de K es un subconjunto compacto de Y.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I} \subseteq \Im_Y$ tal que $f(K) \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$. Tenemos que

$$K \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(\mathcal{U}_i),$$

donde $f^{-1}(\mathcal{U}_i)$ son abiertos en X. Como K es compacto,

$$\exists\{i_1,\dots,i_m\} \subseteq \mathbb{N} \quad K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} f^{-1}(\mathcal{U}_{i_j}) \implies f(K) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{U}_{i_j}.$$

$\square$

La siguiente propiedad de los conjuntos compactos sólo tiene sentido en espacios métricos.

Proposición 2.7.9 (Compacto $\Longrightarrow$ acotado.) *Sea (X, d) espacio métrico y sea $K \subseteq X$ un conjunto compacto. Entonces el conjunto K es acotado.*

DEMOSTRACIÓN: Fijamos $x_0 \in K$ arbitrario, y consideramos el recubrimiento $K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_0, n) = X$. Por compacidad, existe $\{n_1, \ldots, n_m\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(x_0, n_j)$. Pero, $\bigcup_{j=1}^{m} B(x_0, n_j) = B(x_0, N)$ con $N = \max\{n_1, \ldots, n_m\}$, es decir, K es acotado. $\square$

A continuación veremos un resultado muy común en los cursos de Cálculo, llamado el *Teorema de Weierstrass* o a veces el *Teorema del valor extremo*.

TEOREMA 2.7.10

(Teorema de Weierstrass.) Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \to \mathbb{R}$ continua. Entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tal que $f(x_1) = \min_X f$, $f(x_2) = \max_X f$.

DEMOSTRACIÓN: Como X es compacto, tenemos que $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ es compacto, entonces $f(X)$ es cerrado y acotado. Se deduce inmediatamente que

$$-\infty < \inf_{x \in X} f(x) \leq \sup_{x \in X} f(x) < +\infty.$$

Sea $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq f(X)$ tal que $(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf_X f$ y $(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup_X f$. Como $f(X)$ es cerrado, entonces $\inf_X f$, $\sup_X f \in f(X)$, es decir, existen $x_1, x_2 \in X$, tal que $f(x_1) = \inf_X f$ y $f(x_2) = \sup_X f$, lo que muestra lo pedido. $\square$

El siguiente resultado será de utilidad para la demostración del famoso *Teorema de Árzelà-Ascoli* más adelante.

Proposición 2.7.11 *Sea (X, d_X) un espacio métrico compacto y sea (Y, d_Y) un espacio métrico completo. Entonces el espacio $(\mathcal{C}(X, Y), \widehat{d}_\infty)$ de funciones continuas de X a Y es completo, donde*

$$\widehat{d}_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), f(y)). \tag{2.62}$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : X \to Y$ una función continua, luego $f(X)$ es compacto, y por el Teorema 2.7.10, se tiene que $f(X)$ es acotado. Se deduce que $\mathcal{C}(X, Y) \subseteq \ell^\infty(X, Y)$. Dado que este último es completo (véase Ejemplo 2.4.4(ii)), basta entonces que se muestre que $\mathcal{C}(X,Y)$ es cerrado para la distancia $\widehat{d}_\infty$. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$ una sucesión de funciones continuas de X a Y tal que $d_\infty(f_n, f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Veamos que f es continua en X.

En efecto, sean $x \in X$, $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $d_\infty(f_n, f) < \varepsilon/3$ y sea $\delta > 0$ tal que para todo $y \in B(x,\delta)$ se tiene que $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/3$. Por lo tanto para todo $y \in B(x,\delta)$ se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

de donde concluimos que f es continua en x, y por lo tanto es continua en X. □

Observación 2.7.12 Si Y es un espacio de Banach, entonces $(\mathcal{C}(X,Y), ||\cdot||_\infty)$ también es un espacio de Banach (la distancia $\widehat{d}_\infty$ definida en (2.62) proviene entonces de la norma $||\cdot||_\infty$). En particular $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}) := \mathcal{C}(X)$ es Banach.

2.7.1. El teorema fundamental de los espacios métricos compactos

En esta sección presentaremos caracterizaciones equivalentes de la compacidad de un espacio métrico. Empezamos con la siguiente definición.

Definición 2.7.13

(Conjunto totalmente acotado) Sea (X,d) un espacio métrico. Un conjunto $K \subseteq X$ se dice *totalmente acotado*, si para cada $\delta > 0$, existe $\{x_1, \ldots x_m\} \subseteq K$ tal que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \delta)$.

Es fácil ver que cada conjunto totalmente acotado es acotado. En efecto, fijando $\delta > 0$ y utilizando la notación de la Definición 2.7.13, ponemos

$$M = \max_{1\leq i,j\leq m} d(x_i, x_j) \quad \text{y} \quad r = M + 2\delta,$$

y observamos que $\operatorname{diam} X \leq r$.

Proposición 2.7.14 (Totalmente acotado $\Longrightarrow$ separable) *Si un espacio métrico (X,ρ) es totalmente acotado, entonces es separable.*

DEMOSTRACIÓN: Por la Definición 2.7.13 obtenemos para cada $n \in \mathbb{N}$, un conjunto finito $D_n \subseteq X$ tal que

$$X = \bigcup_{y \in D_n} B\left(y, \frac{1}{n}\right).$$

Deducimos que el conjunto $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ es numerable. Mostramos ahora que el conjunto D es denso en X. En efecto, consideramos una bola arbitraria $B(x, \varepsilon)$ de X, con $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $1/m < \varepsilon$, donde

$$X = \bigcup_{y \in D_m} B\left(y, \frac{1}{m}\right) \implies \exists \tilde{y} \in D_m \subseteq D, \quad \text{con } d(\tilde{y}, x) < \frac{1}{m} < \varepsilon,$$

es decir, $B(x, \varepsilon) \cap D \neq \varnothing$. □

Ejemplo 2.7.15 A continuación veremos dos ejemplos importantes sobre conjuntos acotados y totalmente acotados.

(i). **[Esfera de $\ell^2(\mathbb{N})$]** La esfera unitaria S en el espacio de Hilbert $(\ell^2(\mathbb{N}), ||\cdot||_2)$

$$S = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 : \ d_2(x, 0) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^2 = 1\}.$$

Es fácil ver que S es un conjunto acotado, pero no es totalmente acotado. En efecto, consideremos los elementos

$$e_n = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots),$$

donde la n-ésima coordenada de e_n es uno y el resto cero. La distancia entre cualquier par de puntos distintos es $\sqrt{2}$. Tomando entonces $\delta < \sqrt{2}/2$, concluimos que S no es totalmente acotado.

(ii). **[Cubo de Hilbert]** Sea P el conjunto de elementos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ satisfacen las desigualdades

$$|x_1| \leq 1, \quad |x_2| \leq \frac{1}{2}, \ \ldots, \quad |x_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

El conjunto P se llama *cubo de Hilbert*, y es un ejemplo de un conjunto totalmente acotado. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Escogemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^{n-1} < \varepsilon/2$. Asociamos a cada punto $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in P$ con el punto

$$x^* = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \in P.$$

Entonces

$$||x - x^*||_2 = \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} x_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{4^i}} < \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

El conjunto P^* de todos los elementos $x^* \in P$ es acotado en $\mathbb{R}^n$, y por lo tanto, P^* es totalmente acotado. Concluimos entonces que P es totalmente acotado.

Definición 2.7.16

(Numerablemente compacto) Sea (X,d) espacio métrico. Un conjunto $K \subseteq X$ se dice *numerablemente compacto*, si en cada recubrimiento abierto numerable existe un subrecubrimiento finito.

El siguiente resultado nos será de utilidad para demostrar un teorema muy importante de la compacidad en espacios métricos.

Proposición 2.7.17 (Caracterización de compacidad numerable) *Sea (X,d) un espacio métrico. Los siguientes son equivalentes:*

(i). X es numerablemente compacto.

(ii). Cada familia numerable de cerrados $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ que tiene la propiedad de intersección finita (PIF), tiene intersección no vacía.

(iii). Para cada conjunto infinito $S \subseteq K$, se tiene $S' \neq \varnothing$, es decir,

$$\exists x \in K,\ \forall \varepsilon > 0,\ (B(x,\varepsilon) \cap S) \setminus \{x\} \neq \varnothing.$$

DEMOSTRACIÓN: (i)$\Rightarrow$(ii). Es análoga al Teorema 2.7.5.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Sea $S \subseteq K$ infinito y supongamos que $S' = \varnothing$. Como S es infinito, existe una función $x : \mathbb{N} \hookrightarrow S$ (inyectiva) que define una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \neq m$, $x_n \neq x_m$. Sea $S_1 = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq S$. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ los conjuntos $F_n = \{x_i : i \geq n\} \subseteq S$. Como $F_n' = \varnothing$, se deduce que $F_n = \overline{F}_n$, es decir, dichos conjuntos son cerrados. Además $\bigcap\limits_{j=1}^{m} F_{n_j} = F_k \neq \varnothing$, donde $k = \max\limits_{1\leq j\leq m}\{n_j\}$. Tenemos que esta familia de conjuntos tiene la PIF y por lo tanto $\bigcap\limits_{n\geq 1} F_n \neq \varnothing$, lo que es una contradicción.

(iii)$\Rightarrow$(i). Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \Im_X : K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i$. Supongamos que este recubrimiento no admite un subrecubrimiento finito. En este caso, tomamos $x_n \in K \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} \mathcal{U}_i$ y vemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$. Definimos el conjunto $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y notamos que S es necesariamente infinito. (Si S fuera finito, digamos con k elementos, entonces estaría contenido en la unión de k abiertos $\{\mathcal{U}_{i_1}, \ldots \mathcal{U}_{i_k}\}$ del recubrimiento $\{\mathcal{U}_i\}_i$, lo que contradice su definición.)

Se deduce que existe $\bar{x} \in S'$. Sea $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{x} \in \mathcal{U}_{i_0}$. Entonces $\mathcal{U}_{i_0}$ contiene infinitos elementos del conjunto S que podemos enumerar con una subsucesión $\{x_{k(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por otra parte, tomando $k(n) > i_0$ deducimos que

$$x_{k(n)} \notin \bigcup_{j=1}^{k(n)-1} \mathcal{U}_j \quad \text{lo que implica que} \quad x_{k(n)} \notin \mathcal{U}_{i_0},$$

por lo que hay una contradicción. □

El siguiente resultado es el teorema fundamental de la teoría de los espacios métricos compactos.

Teorema 2.7.18

(Espacios métricos compactos – Caracterizaciones) Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subseteq X$ un conjunto cerrado. Los siguientes son equivalentes:

(i). K es compacto.

(ii). K es numerablemente compacto.

(iii). K es secuencialmente compacto
(cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ tiene subsucesión $(x_{k(n)})$ convergente en K.)

(iv). K es completo y totalmente acotado.

DEMOSTRACIÓN: Haremos el siguiente esquema de demostración.

$$\begin{array}{ccc} \text{(i)} & \rightarrow & \text{(ii)} \\ \uparrow & & \updownarrow \\ \text{(iv)} & \leftrightarrow & \text{(iii)} \end{array}.$$

(i)⇒(ii). Es obvio de la definición.

(ii)⇒(iii). Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$. Sea $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Consideramos primero el caso donde el conjunto S es finito. Entonces existe una subsucesión $(x_{k(n)})$ constante, por lo tanto convergente. Supongamos ahora que S es infinito. En este caso, existe una subsucesión $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ con términos distintos, es decir, $x_{k(n)} \neq x_{k(m)}$, si $n \neq m$. Definimos el conjunto $S_1 = \{x_{k(1)}, \ldots, x_{k(n)}, \ldots\}$. Aplicando la Proposición 2.7.17(i)⇒(iii), deducimos que existe $\bar{x} \in S_1'$. Como la sucesión es distinta, $\bar{x}$ es un ω-limite de la sucesión $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (véase Observación 2.2.43). Concluimos aplicando la Proposición 2.2.31.

(iii)⇒(ii). Sea $S \subseteq K$ infinito, entonces existe una inyección $x : \mathbb{N} \hookrightarrow S$, definiendo una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \neq x_m$ (si $n \neq m$). Por (iii) existe una subsucesión $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}} \to \bar{x} \in K$. Se deduce fácilmente que $\bar{x} \in \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}' \subseteq S'$.

(iii)⇒(iv). (K es completo) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ una sucesión de Cauchy. Como K es secuencialmente compacto, existe una subsucesión $(x_{k(n)})_n$ convergente a $\bar{x} \in K$. Se deduce por la Proposición 2.2.28 que $\lim\limits_n x_n = \bar{x} \in K$.

(K es totalmente acotado) Sea $r > 0$. Supongamos que K no se puede cubrir con un número finito de bolas de radio $r > 0$. Sea $x_1 \in K$ tal que $K \nsubseteq B(x_1, r)$. Entonces existe $x_2 \in K \setminus B(x_1, r)$. Luego $K \nsubseteq B(x_1, r) \cup B(x_2, r)$, por lo que existe $x_3 \in K \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{2} B(x_i, r)$. El procedimiento se sigue inductivamente hasta $x_n \in K \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} B(x_i, r)$. Vemos que esto forma una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \neq m$, $d(x_n, x_m) \geq r$. Por lo tanto, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene ninguna subsucesión convergente, lo que contradice (iii).

(iv)⇒(iii). Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ y una sucesión decreciente de reales positivos $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a 0. Como K es totalmente acotado, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $m_i \in \mathbb{N}$ y $\{z_1^i, \ldots, z_{m_i}^i\} \subseteq K$ tal que $K \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{m_i} B(z_j^i, \varepsilon_i)$. Una de estas bolas debe contener infinitos elementos de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En particular, tomando $i = 1$, existe $y_1 := z_{j_1}^1$ y una subsucesión $(x_{k_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_n$ tal que $(x_{k_1(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(y_1, \varepsilon_1)$.
Luego tomamos $i = 2$ y repetimos el argumento anterior para la sucesión $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Deducimos que existe $y_2 = z_{j_2}^2$ tal que $(x_{k_1\circ k_2(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(y_2, \varepsilon_2)$. Procedemos de manera inductiva hasta $\varepsilon_n > 0$. Entonces existe y_m, tal que $(x_{k_1\circ k_2\circ\cdots\circ k_m(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(y_m, \varepsilon_m)$.
Definimos los conjuntos

$$F_m = \overline{\{x_{k_1\circ k_2\circ\cdots\circ k_m(n)} : n \in \mathbb{N}\}}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Es fácil ver que estos conjuntos son cerrados, encajonados y $\operatorname{diam}(F_m) \leq 2\varepsilon_m$. Como K es completo, por el Teorema 2.4.6 (Teorema de Cantor) deducimos que

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} F_m = \{\bar{x}\} \neq \varnothing, \quad \text{es decir,} \quad \forall m \in \mathbb{N},\ \bar{x} \in \overline{\{x_{k_1\circ k_2\circ\cdots\circ k_m(n)} : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Definiendo $m(1) = \min\{k_1(n) : x_{k_1(n)} \in \overline{B}(\bar{x}, 1)\}$, luego

$$\begin{array}{rcl} m(2) & = & \min\{k_1 \circ k_2(n) : \ x_{k_1\circ k_2(n)} \in \overline{B}(\bar{x}, \frac{1}{2}) \ \& \ k_1(k_2(n)) > m(1)\} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m(i) & = & \min\{k_1 \circ \cdots \circ k_i(n) : \ x_{k_1\circ\cdots\circ k_i(n)} \in \overline{B}(\bar{x}, \frac{1}{n}) \ \& \ k_1 \circ \cdots \circ k_i(n) > m(i-1)\}. \end{array}$$

Es fácil comprobar que la subsucesión $(x_{m(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, con límite $\bar{x} \in K$.

(iv)⇒(i). Para mostrar esta implicación utilizaremos también la implicación (iv)⇒(iii) que acabamos de establecer.

Consideramos un recubrimiento abierto $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ de K. Mostramos primero que existe $r > 0$ (que se llama *número de Lebesgue* del recubrimiento) tal que

$$\forall x \in K, \exists i_0 \in I,\ B(x, r) \subseteq \mathcal{U}_{i_0}.$$

Argumentamos por contradicción suponiendo que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in K$, tal que para todo $i \in I$ se tiene que $B(x_n, 1/n) \cap (X \setminus \mathcal{U}_i) \neq \varnothing$. Por (iii), existe una subsucesión $(x_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}} \to \bar{x} \in K$, por lo que existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{x} \in \mathcal{U}_{i_0}$. De esto, tenemos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B(\bar{x}, \varepsilon_0) \subseteq \mathcal{U}_{i_0}$. Como $x_{k(n)} \to \bar{x}$, entonces para $\varepsilon_1 = \varepsilon_0/2$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que para cada $n \geq N_0$, $d(x_{k(n)}, \bar{x}) < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{2}$. Tomando $n \geq N_0$ tal que $k(n) > 2/\varepsilon_0$, tenemos que

$$B(x_{k(n)}, \frac{1}{k(n)}) \subseteq B(x_{k(n)}, \frac{\varepsilon_0}{2}) \subseteq B\left(\bar{x}, \varepsilon_0\right) \subseteq \mathcal{U}_{i_0}.$$

Se deduce que $B(x_{k(n)}, 1/k(n)) \subseteq \mathcal{U}_{i_0}$, lo cual es una contradicción.
Con lo anterior, tenemos que para cada $x \in K$, existe $i(x) \in I$, tal que $B(x, r) \subseteq \mathcal{U}_{i(x)}$.
Como K es totalmente acotado, entonces $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, r) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{U}_{i(x_j)}$. □

Observación 2.7.19 Las implicancias que involucran (iv) no tienen ningún sentido fuera de un contexto métrico. Por otra parte, las implicaciones (i) $\Longrightarrow$ (ii) y (iii) $\Longrightarrow$ (ii) se demuestran de forma puramente topológica, y son válidas en espacios topológicos. Sin embargo, las otras implicancias, aunque tienen sentido en un contexto topológico, no son ciertas en dicho contexto. En particular la compacidad, la compacidad numerable y la compacidad secuencial son nociones distintas en espacios topológicos.

Notemos que para demostrar (iv) $\Longrightarrow$ (i), demostramos un resultado de interés independiente, la existencia del número de Lebesgue de un recubrimiento abierto. Lamentablemente este resultado parcial no es equivalente a que K sea compacto en todos los espacios métricos. Por ejemplo, tomando $X = K = \mathbb{N}$, observamos que cada $r < 1$ es un número de Lebesgue de cualquier recubrimiento abierto de $\mathbb{N}$, sin que este último sea compacto. Sin embargo se tiene el siguiente teorema.

TEOREMA 2.7.20

(Número Lebesgue del recubrimiento) Sea (X, d) un espacio métrico tal que los únicos conjuntos abiertos y cerrados son $\varnothing$ y X. Sea $K \subseteq X$ cerrado. Los siguientes son equivalentes

(i). El conjunto K es compacto.

(ii). Para todo $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I} \subseteq \Im_X$, $K \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$, existe $r > 0$ (*número de Lebesgue de* $\{\mathcal{U}_i\}_i$) tal que
$$\forall x \in K, \exists i_0 \in I : B(x, r) \subseteq \mathcal{U}_{i_0}.$$

DEMOSTRACIÓN: La implicación (i) $\Longrightarrow$ (ii) está contenida en la demostración del (iv) $\Longrightarrow$ (iii) del Teorema 2.7.18 y es siempre cierta (sin la hipótesis adicional)

Veamos que (ii) $\Longrightarrow$ (i). Para ello, demostraremos que si se cumple (ii), entonces se cumple la propiedad (iii) del Teorema 2.7.17. Supongamos por contradicción que existe $S \subseteq K$ infinito con $S' = \varnothing$. Entonces existe una inyección $x : \mathbb{N} \hookrightarrow S$.
Sea $S_1 = x(\mathbb{N}) = \{x_1, x_2, \ldots\}$, se tiene que $S_1' = \varnothing$, por lo que $S_1 = \overline{S}_1$ cerrado en K. Tenemos que S_1 es cerrado en X, por lo que $\mathcal{U}_0 = X \setminus S_1 \in \Im_X$. Además S_1 es discreto, por lo que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\delta_n > 0$ tal que
$$B(x_n, \delta_n) \cap (S_1 \setminus \{x_n\}) = \varnothing.$$

Definimos $\varepsilon_n = \text{mín}\{\delta_n, \frac{1}{n}\}$, $\mathcal{U}_n = B(x_n, \varepsilon_n)$. Vemos que $K \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_n$. Entonces existe $r > 0$, tal que para todo $x \in K$, existe $i \in \mathbb{N}$, tal que $B(x, r) \subseteq \mathcal{U}_i$. Tomando $n > 1/r$, tenemos que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $B(x_n, r) \subseteq \mathcal{U}_i$. Si $n \neq i$, $x_n \notin \mathcal{U}_i$, por lo que
$$B(x_n, r) \subseteq \mathcal{U}_n = B(x_n, \varepsilon_n) \subseteq B(x_n, 1/n).$$

Entonces $B(x_n, r) \subseteq B(x_n, \varepsilon_n) \subseteq \overline{B}(x_n, \varepsilon_n) \subseteq B(x_n, r)$. Por lo anterior, $B(x_n, r) = \overline{B}(x_n, r)$ lo cual es una contradicción, pues $B(x_n, r)$ es a la vez cerrado y abierto, y $X \setminus B(x_n, r) \neq \varnothing$. $\square$

2.7.2. Aplicaciones de la compacidad

La compacidad es una de las propiedades más importantes, debido a que muchas propiedades interesantes ocurren gracias a estos conjuntos. A continuación veremos unos corolarios muy importantes de las caracterizaciones presentadas en la sección anterior.

Teorema Heine-Borel

Empezamos esta sección con el teorema clásico de Heine-Borel. El siguiente resultado (compacidad de un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$) se presenta ahora como aplicación directa del Teorema 2.7.18. Dejamos al lector la tarea de encontrar una demostración directa basada a la definición topológica de la compacidad (Definición 2.7.2).

Corolario 2.7.21 (Heine-Borel en $\mathbb{R}$) *Para cada $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, el intervalo $[a, b]$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: El intervalo $[a, b]$ es completo y totalmente acotado. Se concluye por el Teorema 2.7.18. □

Con el siguiente corolario caracterizaremos todos los conjuntos compactos de $\mathbb{R}^d$.

Corolario 2.7.22 (Heine-Borel en $\mathbb{R}^d$) *En $(\mathbb{R}^d, ||\cdot||_\infty)$ cada conjunto cerrado y acotado es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $K \subseteq \prod_{i=1}^{d} [a_i, b_i]$. Consideremos una sucesión

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x(1)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, x(d)_{n\in\mathbb{N}}) \subseteq K.$$

En particular, la sucesión definida por las primeras coordenadas $(x(1))_n \subseteq [a_1, b_1]$ tiene una subsucesión convergente (*c.f.* Corolario 2.7.21), eso es, existe

$$\{x(1)\}_{k_1(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x}(1) \in [a_1, b_1].$$

Luego, considerando la sucesión $(\{x(2)\}_{k_1(n)})_n \subseteq [a_2, b_2]$ obtenemos una subsucesión $\{x(2)\}_{k_1\circ k_2(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x}(2) \in [a_2, b_2]$. Continuando de esta manera, para $i \in \{1, \ldots, d\}$ obtenemos $\{x(d)\}_{k_1\circ\cdots\circ k_d(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x}(d) \in [a_d, b_d]$.

Consideramos la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = x_{k_1\circ\cdots\circ k_d(n)}$, que es una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dado que la convergencia con la norma $||\cdot||_\infty$ en $\mathbb{R}^d$ es equivalente a la convergencia por coordenadas, concluimos que

$$y_n(i) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x}(i), \quad \forall i \in \{1, \ldots, d\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x}.$$

Como K es cerrado, deducimos que $\bar{x} \in K$ y finalmente que K es secuencialmente compacto. Concluimos que K es compacto por el Teorema 2.7.18. □

Corolario 2.7.23 (Compacto ⇒ separable) *Si X es un espacio métrico compacto, entonces X es separable.*

DEMOSTRACIÓN: Aplicando el Teorema 2.7.18 deducimos que el espacio métrico compacto es totalmente acotado, luego por la Proposición 2.7.14 que es separable. □

El resultado anterior indica que los conjuntos compactos no pueden ser "muy grandes", en términos de cardinalidad, pues al menos debe tener un subconjunto denso y numerable. Más tarde veremos que en verdad la cardinalidad de cualquier conjunto métrico compacto es a lo más 2^c, donde c es la cardinalidad de $\mathbb{R}$.

Conjuntos compactos numerables

Calcularemos ahora el índice Cantor-Bendixson (*c.f.* Definición 2.2.41) de un conjunto compacto numerable. El cálculo está basado a la inducción transfinita y la Proposición 2.7.17 (existencia de puntos de acumulación en cada compacto infinito).

Proposición 2.7.24 (Índice Cantor-Bendixson de compacto numerable) *Sea (X, d) un espacio métrico compacto con $\operatorname{card}(X) \leq \aleph_0$. Entonces existe un ordinal λ tal que $X^{(\lambda)} = \varnothing$. Además el índice de Cantor-Bendixson de X es un ordinal sucesor finito o numerable con $X^{(\lambda)} = \varnothing$.*

DEMOSTRACIÓN: Primero veremos que para todo ordinal α, se tiene que $X^{(\alpha)}$ es compacto. Aplicamos el principio de inducción transfinita (*c.f.* Teorema 1.7.2).

- Se tiene el caso base, pues $X^{(0)} = X$ es compacto.
- Supongamos que $X^{(\alpha)}$ es compacto. Entonces $X^{(\alpha+1)} = (X^{(\alpha)})'$ es un subconjunto cerrado del conjunto compacto $X^{(\alpha)}$, por lo tanto también es compacto.
- Supongamos que β es un ordinal límite y que $X^{(\alpha)}$ es compacto para $\alpha < \beta$. Luego $X^{(\alpha)}$ es cerrado en X y por lo tanto $X^{(\beta)} := \cap_{\alpha<\beta} X^{(\alpha)}$ también lo es (como intersección de cerrados). Concluimos que $X^{(\beta)}$ es compacto.

Como $(X^{(\alpha)})_\alpha$ es una sucesión decreciente de conjuntos, es claro que $\operatorname{card}(X^{(\alpha)}) \leq \aleph_0$ para todo ordinal α. Por la Proposición 2.7.17, tenemos que

$$X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)} = X^{(\alpha)} \setminus (X^{(\alpha)})' \neq \varnothing,$$

para todo ordinal α tal que $X^{(\alpha)}$ es no vacío. Luego, existe λ con $X^{(\lambda)} = \varnothing$ y supongamos que λ es el mínimo con esta propiedad (y por lo tanto sería el índice de Cantor-Bendixson de X). Si $\operatorname{card}(\lambda) > \aleph_0$, como $X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)} \neq \varnothing$ para todo $\alpha < \lambda$, podemos definir una función f tal que a todo ordinal $\alpha \in [0, \lambda)$ le asocia

$f(\alpha) \in X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)}$. Como $(X^{(\alpha)} \setminus X^{(\alpha+1)})_\alpha$ es una secuencia disjunta, vemos que f es inyectiva y así $\mathrm{card}(X) \geq \mathrm{card}(f([0,\lambda))) = \mathrm{card}(\lambda) > \aleph_0$, lo que es un contradicción.

Finalmente, si λ fuese un ordinal límite, como $\mathrm{card}([0,\lambda)) = \mathrm{card}(\lambda) \leq \aleph_0$ tendríamos que una secuencia decreciente y numerable de cerrados encajonados no vacíos en X tiene intersección vacía, lo que contradiría que toda familia de cerrados en X con la PIF tiene intersección no vacía. □

Compacidad y continuidad uniforme

El siguiente resultado es una aplicación clásica de la compacidad y se puede demostrar en varias maneras. Elegimos aquí una demostración elegante basada en el número Lebesgue.

Proposición 2.7.25 *Sean (X,d), (Y,ρ) espacios métricos. Entonces*

$$\left.\begin{array}{r} f: X \to Y \text{ continua} \\ K \subseteq X \text{ compacto} \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ uniformemente continua en } K.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\varepsilon > 0$. Dado que f es continua, obtenemos el siguiente recubrimiento abierto de K:

$$K \subseteq \bigcup_{y\in Y} f^{-1}(B(y,\frac{\varepsilon}{2})).$$

Por el Teorema 2.7.20 (implicancia (i) $\Longrightarrow$ (ii)) existe $r > 0$ (número Lebesgue del recubrimiento) tal que para todo $x \in K$, existe un elemento $y \in Y$ tal que $B(x,r) \subseteq f^{-1}(B(y,\varepsilon/2))$. Tomando $\delta = r$ se deduce que para todo $x_1, x_2 \in K$ tal que $d(x_1,x_2) \leq \delta$ se tiene que $x_2 \in B(x_1,\delta)$ y existe $y \in Y$ tal que $B(x_1,r) \subseteq f^{-1}(B(y,\varepsilon/2))$. Se concluye que $f(x_1), f(x_2) \in B(y,\varepsilon/2)$, es decir $\rho(f(x_1),f(x_2)) \leq \varepsilon$. Eso muestra que f es uniformemente continua. □

Funciones nulamente diferenciables

A continuación veremos un resultado muy importante que involucra a los conjuntos de primera y segunda categoría en un espacio métrico completo. Durante mucho tiempo, los matemáticos creyeron que las funciones continuas real-valuadas en un intervalo deben ser frecuentamente diferenciables, es decir, en un subconjunto "grande" de su dominio. En 1834, *Bernard Bolzano* presentó un ejemplo de una función continua en un intervalo que no era diferenciable en ningún punto de su dominio. Desgraciadamente, la argumentación de Bolzano sufría de un error típico en aquella época, a suponer que un límite puntual de funciones continuas es continua. La primera demostración formal de la existencia de dicho ejemplo se le atribuye a *Karl Weierstrass* por dar un ejemplo de una función continua definida en todo $\mathbb{R}$, que no era diferenciable en ningún punto de su dominio. A pesar del impacto que provocó este ejemplo, los matemáticos continuaron a considerar que las funciones continuas nulamente diferenciables eran objetos muy raros (y por lo tanto escasos). En 1931, *Stefan Banach* mostró que esta percepción era incorrecta, pues demostró que la "mayoría" de las funciones continuas definidas en $\mathbb{R}$ son nulamente diferenciables. Veremos la demostración de este hecho.

Teorema 2.7.26

(Funciones continuas nulamente diferenciables) Sea $\mathcal{D}_+$ el conjunto de las funciones continuas $f \in \mathcal{C}([0,1])$ a valores reales, tales que existe un punto $x \in [0,1)$ en que f tiene una derivada por la derecha finita (es decir, existe el límite

$$\lim_{h \searrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \in \mathbb{R},$$

donde $h \searrow 0^+$ indica que $h > 0$ y $h \to 0$). Entonces $\mathcal{D}_+$ es de primera categoría en $(\mathcal{C}([0,1]), ||\cdot||_\infty)$.

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el siguiente conjunto cerrado:

$$F_n = \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) : \exists x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right], \ \sup \left\{ \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| : x < y < x + \frac{1}{n} \right\} \leq n \right\}.$$

Mostramos que F_n tiene interior vacío, es decir, F_n no puede contener ninguna bola. En efecto, sean $f \in F_n$ y $\varepsilon > 0$. Mostramos que $B(f,\varepsilon)$ no esté contenido en F_n. Como f es continua en $[0,1]$, entonces f es uniformemente continua en $[0,1]$, y por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que si $|t_1 - t_2| < \delta$, entonces $|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon/4$. Sean

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = 1, \quad \text{tales que} \quad |a_{i+1} - a_i| < \delta$$

y definamos para cada $t \in [a_i, a_{i+1}]$ la función

$$\varphi_m(t) \ = \ f(a_i) \ + \left(\frac{f(a_{i+1}) - f(a_i)}{a_{i+1} - a_i} \right) (t - a_i).$$

Es decir, φ_m es lineal por trozos y para todo $i = 0, \ldots, m$ se tiene que $\varphi_m(a_i) = f(a_i)$. Sean $t \in [0,1]$ e $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ tal que $t \in [a_i, a_{i+1}]$. Notemos que

$$|\varphi_m(t) - f(t)| \leq |\varphi_m(t) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, $||f - \varphi||_\infty \leq \varepsilon/2$. Notemos que φ tiene derivada por la derecha en todo punto y como la partición es finita, existe $M > 0$ tal que para todo $t \in [0,1]$, $|\varphi'(t_+)| \leq M$. Sea $k \in \mathbb{N}$ y definimos la función $\phi_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\phi_k(t) = \begin{cases} k(t - \frac{i}{k}), & \text{si } i \text{ es par y } t \in [\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}] \\ 1 - k(t - \frac{i}{k}), & \text{si } i \text{ es impar y } t \in [\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}]. \end{cases}$$

Consideremos la función

$$g = \varphi_m + \frac{\varepsilon}{2}\phi_k$$

y observemos que para todo $t \in [0,1]$ se tiene que

$$|f(t) - g(t)| \leq |f(t) - \varphi(t)| + \frac{\varepsilon}{2}|\phi_k(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

por lo tanto $||f - g||_\infty < \varepsilon$. Por otra parte, tomando $k > 2(M+n)/\varepsilon$, veamos que $g \notin F_n$.

En efecto, sean $t \in [0, 1-1/n]$ e $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ tal que $\frac{1}{k} \leq t < \frac{i+1}{k}$. Tomemos $h \in (0, 1/n)$ tal que $i/k < t+h < (i+1)/k$ y tenemos:

$$\left|\frac{g(t+h) - g(t)}{h}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{\phi_k(t+h) - \phi_k(t)}{h}\right| - \left|\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}k - M > n,$$

y por lo tanto $g \notin F_n$.

Dado que los conjuntos F_n son cerrados de interior no vacío, deducimos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ es de primera categoría en $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Tenemos que una función en $\mathcal{C}([0,1])$ con derivada por la derecha finita en algun punto de $[0,1)$ debe estar en algún F_n, entonces $\mathcal{D}_+ \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ de donde concluimos que $\mathcal{D}_+$ es de primera categoría en $\mathcal{C}([0,1])$. □

Concluimos el siguiente resultado.

Corolario 2.7.27 (Genericidad de funciones nulamente diferenciables) *El conjunto $\mathcal{G}$ de las funciones $f \in \mathcal{C}([0,1])$ que no son diferenciables en ningún punto de $(0,1)$ es genérico en $\mathcal{C}([0,1])$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el Teorema 2.7.26 deducimos que el complemento de G está contenido en un conjunto de primera categoría. Dado que $(\mathcal{C}([0,1]), ||\cdot||_\infty)$ es un espacio de Banach, concluimos por el Teorema 2.4.12. □

Obtener homeomorfismos entre compactos

Empezamos por el siguiente resultado fundamental de interés primordial.

TEOREMA 2.7.28

(Inyecciones continuas de compactos) Sea (X,d) un espacio métrico compacto, (Y,ρ) un espacio métrico y $f : X \to Y$ una función continua.

(i) f envía conjuntos cerrados a conjuntos cerrados.

(ii) Si f es inyectiva, entonces f es *abierta*
(es decir, f envía conjuntos abiertos de X a conjuntos abiertos de $f(X)$).

(iii) Si f es inyectiva, entonces f es un homeomorfismo entre X y $f(X) \subseteq Y$.

DEMOSTRACIÓN: (i). Sea $K \subseteq X$ cerrado. Por la Proposición 2.7.6 se tiene que K es compacto. Por la Proposición 2.7.8 se tiene que $f(K)$ es compacto. Se concluye por la Proposición 2.7.7 que $f(K)$ es cerrado.

(ii). Sea $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto. Como f es inyectiva, se tiene que $f(X) \setminus f(\mathcal{U}) = f(X \setminus \mathcal{U})$ que por la parte (i) es cerrado. Por lo tanto $f(\mathcal{U})$ es abierto.

(iii). La función f es una biyección sobre $f(X)$. Por ser abierta, se concluye que $f^{-1} : f(X) \mapsto X$ es continua. □

El siguiente resultado, que es una consecuencia inmediata del teorema anterior, nos proporciona criterios para establecer homeomorfismos.

Corolario 2.7.29 (Criterio de equivalencia de distancias) *Sean d, ρ dos distancias en X. Si el espacio métrico (X, d) es compacto y $d \preceq \rho$ (es decir, la función identidad $\mathrm{id} : (X, d) \to (X, \rho)$ es continua), entonces las distancias d y ρ son equivalentes, es decir, $d \sim \rho$.*

Topología de $\mathbb{R}^d$ y el teorema de Riesz

En esta parte mostraremos formalmente la equivalencia de las normas en dimensión finita, lo que hace legítimo hablar de la topología de $\mathbb{R}^d$ sin referencia a ninguna norma. Asimismo caracterizaremos los espacios normados de dimensión finita mediante la compacidad de la bola unitaria (*c.f.* Teorema de Riesz).

Corolario 2.7.30 (Equivalencias de normas en $\mathbb{R}^d$) *Todas las normas en $\mathbb{R}^d$ son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $N : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una norma en $\mathbb{R}^d$. Vamos a establecer que N es equivalente a la norma $|| \cdot ||_\infty$ de $\mathbb{R}^d$. En efecto, denotamos por $K = \overline{B}_\infty(0,1)$ la bola unitaria cerrada de la norma $\|\cdot\|_\infty$. Por el Corolario 2.7.22, K es compacto. Sea $\langle e_1, \ldots, e_d \rangle$ una base de $\mathbb{R}^d$ y $M = \sum_{i=1}^{d} N(e_i)$. Sea $x \in \mathbb{R}^d$. Se tiene entonces que $x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$, luego

$$N(x) \leq \sum_{i=1}^{d} |x_i|\, N(e_i) \leq \max_{1 \leq i \leq d} |x_i| \left(\sum_{i=1}^{d} N(e_i) \right) = M \, \|x\|_\infty \,.$$

Por lo tanto $\mathrm{id} : (K, \|\cdot\|_\infty) \to (K, N)$ es continua. Aplicando el Corolario 2.7.29 concluimos que $N \sim \|\cdot\|_\infty$. $\square$

El siguiente resultado nos entrega una caracterización importante de los espacios vectoriales de dimensión infinita.

Teorema 2.7.31

(Teorema de Riesz) Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Los siguientes son equivalentes:

(i). El espacio X es de dimensión finita (*i.e.* $\dim X < \infty$).

(ii). La bola cerrada unitaria $\overline{B}_X(0,1)$ es un conjunto compacto.

(iii). Cada conjunto $K \subseteq X$ cerrado y acotado es compacto.

DEMOSTRACIÓN: (i)$\Rightarrow$(ii) se tiene por el Corolario 2.7.22 (Heine-Borel).

(ii)$\Rightarrow$(iii). Sea $K \subseteq X$ un conjunto cerrado y acotado. En particular, existe $r > 0$ tal que $K \subseteq \overline{B}(0,r)$. Dado que $\overline{B}(0,r)$ es la imagen del conjunto compacto $\overline{B}(0,1)$ por la aplicación continua $x \mapsto T(x) := r \cdot x$, $x \in \mathbb{R}^d$, se deduce que este último es compacto (Proposición 2.7.8). Por lo tanto, K es compacto, como subconjunto cerrado de un compacto (Proposición 2.4.3).

(iii)$\Rightarrow$(ii) es inmediato.

(ii)$\Rightarrow$(i) Supongamos que el espacio X es de dimensión infinita. Sea $x_1 \in X$ con $\|x_1\| = 1$, luego $Y = \langle x_1 \rangle \subseteq X$ es cerrado. Entonces existe $z \notin Y$ tal que $d(z,y) = \alpha > 0$. Tomando $K = \overline{B}(z, 2\alpha) \cap Y$, vemos que K es compacto, y la función $f(y) = \|z - y\|$ es continua. Entonces existe $\overline{y} \in Y$ tal que para cada $y \in K$, $\|\overline{y} - z\| \leq \|y - z\|$. En particular $\|\overline{y} - z\| = \alpha = d(z, Y)$. Tomando

$$x_2 = \frac{z - \overline{y}}{\|z - \overline{y}\|},$$

vemos que $\|x_2\| = 1$, y

$$d(x_2, Y) = \inf_{y' \in Y} \{\|x_2 - y'\|\} = \frac{1}{\|z - \overline{y}\|} \inf_{y' \in Y} \{\|(x - \overline{y}) - y'\|\} = \frac{1}{\|z - \overline{y}\|} d(z, Y) = 1.$$

Se define de manera inductiva, la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $\|x_m - x_n\| \geq 1$, $m \neq n$. Esta sucesión no tiene ninguna subsucesión convergente. $\square$

Una consecuencia interesante del Teorema 2.7.31 es la siguiente:

Los conjuntos compactos de un espacio de dimensión infinita tienen interior vacío.

2.7.3. Teoremas clásicos: Dini, Tychonoff, Arzelà-Ascoli

A continuación veremos unos teoremas importantes en la teoría de los espacios métricos que derivan de la noción de compacidad.

Teorema de Dini

Para poder enunciar el Teorema de Dini, necesitaremos de las siguientes definiciones

Definición 2.7.32

(Convergencia puntual) Sean (X, d) e (Y, ρ) dos espacios métricos, y sea $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$ una sucesión de funciones. Decimos que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge puntualmente* a una función $f : X \to Y$ si

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{para todo } x \in X.$$

La convergencia puntual introducida por la definición anterior se debe comparar con la siguiente definición de convergencia fuerte.

Definición 2.7.33

(Convergencia uniforme) Sean (X, d) e (Y, ρ) dos espacios métricos, y $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$ una sucesión de funciones. Decimos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente* a la función $f : X \to Y$ si

$$\sup_{x\in X} d(f_n(x), f(x)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Observación 2.7.34 (Convergencia en $\ell^\infty(X, Y)$) Si las funciones son acotadas (es decir, $f_n \in \ell^\infty(X, Y)$) es fácil ver que la convergencia uniforme introducida por la Definición 2.7.33 no es otra que la convergencia habitual de la norma uniforme $||\cdot||_\infty$ del espacio $\ell^\infty(X, Y)$.

Es claro que si una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f. Sin embargo, lo recíproco no es cierto.

Ejemplo 2.7.35 (Convergencia puntual vs uniforme) En el intervalo $[0, 1]$ consideramos la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definida por $f_n(x) = x^n$. Es fácil ver que $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función f definida como

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Pero la sucesión $\{f_n\}$ no converge uniformemente a la función f. En efecto, como $(f_n)_n \subseteq \mathcal{C}([0,1]) \subseteq \ell^\infty([0,1])$, la convergencia uniforme implicaría que f es continua. (Recordamos que $\mathcal{C}([0,1])$ es un subespacio cerrado de $\ell^\infty([0,1])$, véase Ejemplo 2.4.4(vi).) □

Con las definiciones anteriores podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.7.36

(Teorema de Dini) Sea K un espacio métrico compacto, $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua y $f_n : K \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ una sucesión de funciones continuas. Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f y para todo $x \in K$ la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de $\mathbb{R}$, entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.

Demostración: Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$. Entonces $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas K que converge puntualmente (y de forma decreciente) a 0. Definimos

$$M_n = \sup\{g_n(x) : x \in K\} := ||g_n||_\infty.$$

Probaremos que $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$, es decir, $||f_n - f||_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Sea $\varepsilon > 0$ y definimos $\mathcal{U}_n = g_n^{-1}((-\infty, \varepsilon))$, $n \in \mathbb{N}$. Como g_n es continua, entonces los conjuntos $\mathcal{U}_n$ son abiertos. Como $g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$, entonces $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+1}$. Para cada $x \in K$, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ por lo que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $g_{n_0}(x) < \varepsilon$, es decir, $x \in \mathcal{U}_{n_0}$. Así $K = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$. Como K es compacto, existe un subcubrimiento finito $\{\mathcal{U}_{n_1}, \ldots \mathcal{U}_{n_0}\}$. Como $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_{n+1}$, definimos $N = \max\{n_1, \ldots, n_0\}$, por lo que $K = \mathcal{U}_N$. Esto es $g_N(x) < \varepsilon$ para todo $x \in K$. Así $||g_N||_\infty = M_N \leq \varepsilon$. Como la sucesión $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y $M_n \geq 0$, concluimos que $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$. □

A continuación veremos que todas las hipótesis son necesarias

Ejemplo 2.7.37 (Teorema de Dini – Necesidad de las hipótesis) Todas las hipótesis del Teorema 2.7.36 son necesarias. Veremos a continuación unos contraejemplos adaptados.

(i). (Compacidad de K) Consideramos el conjunto $K = (0,1)$ (que no es compacto) y la sucesión $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ de funciones continuas. Para cada $x \in (0,1)$ la sucesión $(f_n(x))_n$ converge de forma decreciente a 0. Pero la convergencia no es uniforme, pues

$$\sup_{x\in(0,1)} x^n = 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(ii). (f continua) Consideramos el conjunto compacto $K=[0,1]$, y para todo $n\in\mathbb{N}$, definimos la función

$$f_n(x)=\begin{cases} -nx+1, & \text{si } x\in[0,\frac{1}{n}] \\ 0, & \text{si } x\in(\frac{1}{n},1]. \end{cases}$$

La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a la función

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{si } x=0 \\ 0, & \text{si } x\in(0,1]. \end{cases}$$

Observamos que esta última no es una función continua, luego dicha convergencia no es uniforme:

$$\sup_{x\in(0,1)}\{f_n(x)-f(x)\} \;=\; 1, \quad \text{para todo}\, n\in\mathbb{N}$$

(iii). ($\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ decreciente) Sea $K=[0,1]$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, consideremos la función

$$f_n(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } x\in[0,\frac{1}{n})\cup(\frac{2}{n},1] \\ 2nx-2, & \text{si } x\in[\frac{1}{n},\frac{3}{2n}) \\ -2nx+4, & \text{si } x\in[\frac{3}{2n},\frac{2}{n}]. \end{cases}$$

Esta sucesión de funciones converge puntualmente a la función cero. Pero la convergencia no es uniforme, pues

$$\sup\{f_n(x): x\in[0,1]\}=1.$$

En este caso, el Teorema 2.7.36 no se puede aplicar debido a que la sucesión nula $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es decreciente. $\square$

Teorema de Tychonoff (versión métrica)

El siguiente teorema es de los más fundamentales en análisis matemático y afirma que la compacidad se conserva por productos numerables. La versión topológica es mucho más general y la veremos en el siguiente capítulo.

Teorema 2.7.38

(Teorema de Tychonoff, caso métrico) Sean (X_n,σ_n) espacios métricos compactos. Entonces el espacio métrico producto (*c.f.* Definición 2.5.13)

$$\widehat{X}=\prod_{n=1}^{\infty}X_n \quad \text{es compacto.}$$

Demostración: Sea $\widehat{x}_n\equiv\{x(i)_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\widehat{X}$. Utilizando sucesivamente la compacidad secuencial de los espacios métricos X_i, $i\in\mathbb{N}$ tenemos: $\{x(1)\}_n\subseteq X_1$

por lo tanto existe $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que la sucesión $\{x(1)_m\}_{m\in M_1}$ converge a un elemento $\bar{x}(1) \in X_1$. Luego consideramos la sucesión $\{x(2)\}_{n\in M_1} \subseteq X_2$ y deducimos la existencia de un conjunto infinito $M_2 \subseteq M_1 \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\{x(2)_m\}_{m\in M_2} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x}(2) \in X_2$.

Definimos por recurrencia para todo $n \in \mathbb{N}$ un conjunto infinito $M_n \subseteq M_{n-1}$ tal que $\{x(n)_m\}_{m\in M_n} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x}(n) \in X_n$.
Mediante un argumento diagonal elegimos $k_1 \in M_1$, $k_2 \in M_2$ tal que $k_2 > k_1$, $k_m \in M_m$ tal que $k_m > k_{m-1}$. Consideremos *la sucesión diagonal* $(x_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ y ponemos $M = (k_1, k_2, \ldots, k_m, k_{m+1}, \ldots)$. Notemos que $M \cap \{n : n \geq k_m\} \subseteq M_m$, luego

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in M}} x(i)_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in M_i}} x(i)_n = \bar{x}(i) \text{ para cada } i \in \mathbb{N}.$$

Aplicando la Proposición 2.5.14 se concluye que $\lim_{n\in M} \widehat{x}_n = \bar{x} = (x(i)_n)_{i=1}^{\infty}$. □

Como hemos mencionado antes, este teorema se puede extender a espacios topológicos, donde además el producto no es necesariamente numerable, sino de cualquier cardinalidad.

Corolario 2.7.39 *Los espacios métricos $[0,1]^{\mathbb{N}}$ (cubo de Hilbert) y $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (conjunto de Cantor[2]) son compactos con la topología producto.*

Teorema de Arzelà-Ascoli

Finalizaremos esta sección, demostrando el *Teorema de Arzelà-Ascoli*, el cual es muy importante en diversas áreas de matemáticas, como por ejemplo en la teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales y en el Análisis Complejo. Para poder enunciar dicho teorema debemos introducir las siguientes definiciones.

Definición 2.7.40

(Conjuntos precompactos) Un conjunto $A \subseteq X$ se dice *precompacto* o *relativamente compacto* si su adherencia es compacta.

Observación 2.7.41 Mientras que la Definición 2.7.40 tiene sentido en un espacio topológico, es fácil ver que en un espacio métrico (X, d), un subconjunto A de X es precompacto si y sólo si es totalmente acotado.

A continuación consideramos dos espacios métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) e introducimos la noción importante de *equi-continuidad*.

[2]Esta terminología se justificará en la siguiente sección

Definición 2.7.42

(Familia equicontinua) Una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ se dice *equicontinua* si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, x' \in X$ con $d_X(x, x') \leq \delta$ se tiene que

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon, \quad \text{para cada función } \ f \in \mathcal{F}.$$

Con las definiciones anteriores, procedemos a enunciar el teorema de Arzelà-Ascoli.

Teorema 2.7.43

(Teorema de Arzelà-Ascoli) Sean (X, d_X) un espacio métrico compacto e (Y, d_Y) un espacio métrico completo. Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ es una familia equicontinua y para todo $x \in X$, el conjunto de evaluaciones

$$\{f(x) : f \in \mathcal{F}\} \subseteq Y \quad \text{es relativamente compacto,}$$

entonces $\mathcal{F}$ es precompacto en $(\mathcal{C}(X, Y), d_\infty)$.

DEMOSTRACIÓN: Notemos primero que dado que (X, d_X) es compacto y (Y, d_Y) es completo, luego $(\mathcal{C}(X, Y), d_\infty)$ es un espacio métrico completo, véase Proposición 2.7.11. Demostraremos el teorema mediante los siguientes pasos:

Paso 1. Por el Teorema 2.7.18, notemos que $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto si y solo si $\overline{\mathcal{F}}$ es secuencialmente compacto, es decir, cada sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathcal{F}}$ tiene una subsucesión convergente en $\overline{\mathcal{F}}$. Dado que $\mathcal{C}(X, Y)$ es completo, esto es equivalente a que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tenga una subsucesión de Cauchy.

Paso 2. Como X es compacto, entonces X es totalmente acotado (Teorema 2.7.18), es decir, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $n(m) \in \mathbb{N}$, y un subconjunto finito $\{x_{m_i}\}_{i=1}^{n(m)}$ de X tal que $X \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n(m)} B(x_{m_i}, \frac{1}{m})$. Es fácil ver que el siguiente conjunto numerable

$$D = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{i=1}^{n(m)} \{x_{m_i}\} \right),$$

es denso. En particular, considerando una enumeración $D = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D, deducimos que para todo $\delta > 0$, existe $n(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall x \in X : \min_{1 \leq j \leq n(\delta)} d_X(x, x_j) \leq \delta.$$

Paso 3. Vamos a demostrar que para cada sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, existe una subsucesión $\{f_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $j \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{f_{\varphi(n)}(x_j)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en Y.

Por hipótesis para todo $x \in X$: $H_x = \{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ es relativamente compacto. Sea $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en H_x. Entonces existe $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $\{f_{h(n)}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en Y.
Sea $x_1 \in D$. Entonces existe $f_{\varphi_1(n)}(x_1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} r_1 \in Y$. Sea $x_2 \in D$. Luego $\{f_{\varphi_1(n)}(x_2)\}$ es una sucesión en H_{x_2}. Por lo tanto existe $\{f_{\varphi_2(n)}(x_2)\}_{n\in\mathbb{N}}$ subsucesión tal que

$$f_{\varphi_2(n)}(x_2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} r_2 \in Y.$$

Procediendo de manera inductiva, para $k \in \mathbb{N}$ cualquiera, tenemos la sucesión $\{f_{\varphi_{k-1}(n)}(x_k)\}$ en H_{x_k}. Por lo tanto existe $\{f_{\varphi_k(n)}(x_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $\{f_{\varphi_{k-1}(n)}(x_k)\}$ tal que

$$f_{\varphi_k(n)}(x_i) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} r_i \in Y, \text{ para todo } i \leq k.$$

Por argumento diagonal, definimos la función

$$\begin{cases} \varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N} \\ \varphi(i) := \varphi_i(i). \end{cases}$$

Sea $j \in \mathbb{N}$ y mostramos que $\{f_{\varphi(n)}(x_j)\}_{n\in\mathbb{N}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} r_j$. En efecto, para cada $n \leq j$ se tiene que

$$f_{\varphi(n)}(x_j) = f_{\varphi_n(n)}(x_j)\} \in \{f_{\varphi_j(k)}(x_j)\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{y} \quad \varphi_n(n) \geq \varphi_j(n).$$

Como $f_{\varphi_j}(k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} r_j$, existe $n_j \in \mathbb{N}$, tal que para cada $m, n \geq n_j$ se tiene que

$$d_Y(f_{\varphi_j(n)}(x_j), f_{\varphi_j(m)}(x_j)) \leq \varepsilon.$$

Tomando $\hat{n_j} = \max\{j, n_j\}$ deducimos que $\varphi(\hat{n_j}) \geq \varphi_j(n_j)$ y concluimos que para cada $n, m \leq \hat{n_j}$ se tiene que

$$d_Y(f_{\varphi(n)}(x_j), f_{\varphi(m)}(x_j)) < \varepsilon.$$

Paso 4. Concluiremos la demostración, mostrando que $\{f_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{C}(X,Y), d_\infty)$.
En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Por la equicontinuidad, existe $\delta > 0$, tal que para todo $x, x' \in X$ con $d_X(x, x') \leq \delta$, se tiene que

$$d_Y(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(n)}(x')) \leq \varepsilon, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{2.63}$$

Podemos claramente suponer que $\delta < \varepsilon/3$. Luego, por el Paso 2, existe $n(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que para cada $x \in X$ existe $j \in \{1, \ldots, n(\delta)\}$, tal que $d(x, x_j) \leq \delta$. Por el Paso 3, existe $\hat{n}_j \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq \hat{n}_j$ se tiene que $d_Y(f_{\varphi(n)}(x_j), f_{\varphi(m)}(x_j)) < \varepsilon/3$. Tomamos

$$\hat{n} \;=\; \max_{1\leq j\leq n(\delta)} \{\hat{n}_j\},$$

y notemos que para todo $n, m \geq \hat{n}$ y para todo $x \in X$ existe $j_0 \in \{1, \ldots, n(\delta)\}$ tal que $d_Y(x, x_{j_0} < \delta$. En virtud de (2.63) se tiene que

$$\begin{aligned} d_Y(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(m)}(x)) \;&\leq\; d_Y(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(n)}(x_{j_0})) \;\;+\;\; d_Y(f_{\varphi(n)}(x_{j_0}), f_{\varphi(m)}(x_{j_0})) + \\ &+\; d_Y(f_{\varphi(m)}(x_{j_0}), f_{\varphi(m)}(x)) \;\;\leq\;\; \delta + \varepsilon/3 + \delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

Dado que $\hat{n} \in \mathbb{N}$ es independiente de $x \in X$, se deduce que para todo $n, m \geq \hat{n}$

$$d_\infty(f_{\varphi(n)}, f_{\varphi(m)}) = \sup_{x\in X} d_Y(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(m)}(x)) \leq \varepsilon.$$

Concluimos que $\{f_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{C}(X, Y), d_\infty)$. Por el Paso 1, concluimos la demostración del teorema de Arzelà-Ascoli. □

2.8. El Conjunto de Cantor

Finalizaremos este capítulo, estudiando algunas propiedades del famoso "Conjunto de Cantor". El *Conjunto de Cantor*, llamado así por ser aporte de *George Cantor* en el año 1883, es muy importante en el área de la topología ya que debido a sus propiedades es una fuente de muchos contraejemplos.

2.8.1. Construcción y propiedades

En esta sección estudiaremos las propiedades puramente métricas del Conjunto de Cantor, empezando primero por su construcción geométrica.

Construcción geométrica del conjunto de Cantor: Consideramos el intervalo unitario $[0, 1]$. Dividimos este intervalo en tres subintervalos iguales. De esta manera obtenemos los siguientes intervalos.

$$I_0^1 = \left[0, \frac{1}{3}\right], \;\; \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \;\; I_1^1 = \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

En la primera etapa quitamos el subintervalo $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y llamamos Δ_1 a la unión de los intervalos restantes. Es decir,

$$\Delta_1 = I_0^1 \cup I_1^1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

El segundo paso consiste en repetir el mismo proceso a cada uno de los intervalos que componen a Δ_1, obteniendo

$$\Delta_2 = I_0^2 \cup I_1^2 \cup I_2^2 \cup I_3^2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Repitiendo este proceso de manera inductiva, obtenemos que $\Delta_n = \bigcup_{i=0}^{2^n-1} I_i^n$. Observamos que $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia decreciente de conjuntos compactos.

Definición 2.8.1

(Conjunto de Cantor) Definimos el conjunto de Cantor como la intersección de todos los conjuntos Δ_n, es decir

$$\Delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n.$$

Notemos que $\Delta \neq \varnothing$, debido a que $[0,1]$ es compacto y la familia $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sus subconjuntos cerrados tiene la PIF. (También se puede aplicar el Teorema 2.4.6, dado que $\operatorname{diam} \Delta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $[0,1]$ es completo.)

Se deduce inmediatamente que Δ es compacto. La siguiente proposición muestra algunas propiedades topológicas adicionales del conjunto de Cantor.

Proposición 2.8.2 (Propiedades del conjunto de Cantor) *El conjunto de Cantor Δ no contiene intervalos, es nulamente denso y es perfecto.*

DEMOSTRACIÓN: Notemos primero que para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto Δ_n no puede contener ningún intervalo de largo mayor o igual a $1/3^n$. Supongamos ahora que existe $a, b \in \Delta$ tal que $[a,b] \subseteq \Delta$. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/3^n < |a-b|$. Entonces $[a,b] \nsubseteq \Delta_n$, por lo que $[a,b] \nsubseteq \Delta$. Deducimos que $\operatorname{int}(\Delta) \neq \varnothing$. Dado que Δ es cerrado, obtenemos que es nulamente denso.

Mostramos ahora que Δ es un conjunto perfecto, eso es, $\Delta' = \Delta$. Dado que Δ es cerrado, es suficiente establecer que $\Delta \subseteq \Delta'$. Para eso, consideramos $x \in \Delta$ (arbitrario) y $\varepsilon > 0$. Tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/3^n < \varepsilon$. Como $x \in \Delta_n$, existe $i \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ tal que $x \in I_i^n = [a,b]$, con $a, b \in \Delta$. Se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} |x-a| \leq 3^{-n} < \varepsilon \\ |x-b| \leq 3^{-n} < \varepsilon \end{array}\right\} \Longrightarrow (B(x,\varepsilon) \cap \Delta) \setminus \{x\} \neq \varnothing.$$

Concluimos que $x \in \Delta'$, por lo tanto, $\Delta \subseteq \Delta'$ y finalmente, $\Delta = \Delta'$. $\square$

El siguiente resultado ayuda a entender de mejor manera el conjunto de Cantor, pues veremos que es topológicamente equivalente al espacio métrico compacto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ que es más fácil de entender.

Teorema 2.8.3

($\Delta \approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$) El conjunto de Cantor Δ es homeomorfo al espacio métrico compacto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (árbol diádico).

DEMOSTRACIÓN: Dividimos la demostración en 4 pasos.

Paso 1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la función $\phi_n : \triangle \mapsto \{0,1\}$ (véase Figura 2.3), como

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists k \in \{0,\ldots,2^{n-1}-1\} \text{ tal que } x \in I^n_{2k} \\ 1 & \text{si } \exists k \in \{0,\ldots,2^{n-1}-1\} \text{ tal que } x \in I^n_{2k+1}. \end{cases}$$

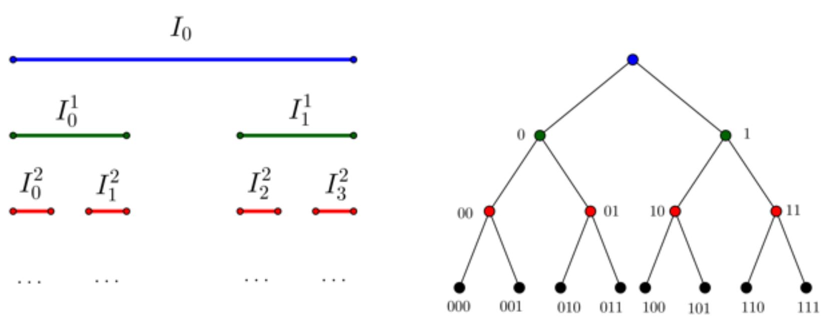

Figura 2.3: Identificación de Δ con árbol diádico.

La función ϕ_n es continua, ya que la preimagen de cada uno de los cuatro subconjuntos cerrados de $\{0,1\}$ es cerrado. En efecto, $\phi_n^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ y $\phi_n^{-1}(\{0,1\}) = \Delta$, luego

$$\phi_n^{-1}(\{0\}) = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}-1} (I^n_{2k} \cap \triangle) \qquad \text{y} \qquad \phi_n^{-1}(\{1\}) = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}-1} (I^n_{2k+1} \cap \triangle)$$

son cerrados, como uniones finitas de cerrados.

Paso 2. Definimos la función $\phi : \triangle \mapsto \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ como $\phi(x) = (\phi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. La función ϕ es continua, ya que para todo $n \in \mathbb{N}$, ϕ_n es continua: en efecto, sea $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \Delta$

tal que $x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\phi_n(x_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \phi_n(x)$, lo que equivale a $\phi(x_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \phi(x)$ (véase Proposición 2.5.14).

Paso 3. Mostramos que ϕ es inyectiva. En efecto sean $x, y \in \Delta$, $x \neq y$. Existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{3^n} < |x-y| \leq \frac{1}{3^{n-1}}$, luego si $\phi_n(x) \neq \phi_n(y)$ lo que implica que $\phi(x) \neq \phi(y)$.

Paso 4. Mostramos que ϕ es sobreyectiva: Sea $S = (s_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Consideremos la siguiente sucesión,

$$k_1 = s_1$$
$$k_{n+1} = \begin{cases} 2k_n & , \text{ si } s_{n+1} = 0 \\ 2k_n + 1 & , \text{ si } s_{n+1} = 1. \end{cases}$$

Vemos que $0 \leq k_n \leq 2^{n-1} - 1$, entonces existe $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I^n_{k_n} \neq \varnothing$, definiendo $\phi(x) = S$. Dado que ϕ es una biyección, continua y $\triangle$ es compacto se deduce que ϕ es un homeomorfismo: $\triangle \approx \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. □

Observación 2.8.4 (Asignar direcciones en el Cantor) El teorema anterior nos dice que el conjunto de Cantor se comporta topológicamente igual al espacio $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (árbol diádico). Intuitivamente, cada sucesión $s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ corresponde a *la dirección* de un único elemento de Δ. Como consecuencia de esta identificación, podemos concluir que

$$\operatorname{card}(\triangle) = \operatorname{card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) = \mathfrak{c},$$

es decir, que el conjunto de Cantor tiene la cardinalidad del continuo.

2.8.2. El conjunto de Cantor como espacio universal

Con el siguiente teorema, veremos la importancia del conjunto de Cantor como espacio universal en el área de la Topología y del Análisis Matemático.

TEOREMA 2.8.5

(Proyectividad universal) Cada espacio métrico compacto es una imagen continua del conjunto de Cantor. En otras palabras, si (X, d) es compacto, entonces existe $\phi : \Delta \mapsto X$ continua y sobreyectiva.

DEMOSTRACIÓN: Identificando Δ con $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, mostraremos la existencia de una sobreyección continua de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ al espacio compacto X. La idea de la demostración será utilizar recursivamente la compacidad para *crear direcciones* (es decir, sucesiones

$s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$) para todos los elementos de X, luego hacer corresponder cada dirección (elemento de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$) a su *destinatario* (elemento de X). Es la misma idea de base con la demostración del Teorema 2.4.6, la diferencia es que el conjunto Δ admite de forma natural direcciones, que además son únicas para cada elemento. En el caso general de un compacto X, el mismo elemento puede tener varias direcciones.

Sea $\varepsilon_1 = 1$, luego $\{B(x,1)_{x\in X}\}$ es un recubrimiento abierto de X. Como X es compacto existe un subrecubrimiento finito $\{B(x_i,1)\}_{i\in F}$. Repitiendo algunas bolas, podemos suponer que la cardinalidad $|F| = 2^{m_1}, m_1 \in \mathbb{N}$, es decir, $F \approx \{0,1\}^{m_1}$. Sea $t \in \{0,1\}^{m_1}$, luego $t = (t(1), \ldots t(m_1))$. Consideremos la familia de compactos $M_t = \overline{B}(x_t, 1)$, $t \in \{0,1\}^{m_1}$, vemos que

$$\operatorname{diam}(M_t) \leq 2, \qquad \text{y además} \qquad X = \bigcup_{t\in\{0,1\}^{m_1}} M_t.$$

Sea $\varepsilon_2 = 1/2$, luego $\{B(x,1/2)_{x\in M_t}\}$ es un recubrimiento abierto de M_t. Como M_t es compacto, para cada $t \in \{0,1\}^{m_1}$, existe un conjunto finito F_t y un subrecubrimiento finito $\{B(x_{t_s},1/2)\}_{s\in F_t}$ del compacto M_t. Repitiendo algunas bolas, podemos suponer que $|F_t| = 2^{k_1}$, para todo $t \in \{0,1\}^{m_1}$. Observamos que el conjunto $M_{t_2} = \overline{B}(x_{t_s}, 1/2) \cap M_t$ tiene diámetro $\operatorname{diam}(M_{t_2}) \leq 1$, para todo $t \in \{0,1\}^{m_1}$ y $s \in \{0,1\}^{k_1}$. En continuación ponemos $m_2 = m_1 + k_1$ e identificamos el conjunto

$$\left\{ t_s : t \in \{0,1\}^{m_1}, s \in \{0,1\}^{k_1} \right\},$$

con el conjunto de sucesiones finitas diádicas $t_2 \in \{0,1\}^{m_2}$ sobre $\{1,\ldots,m_2\}$. Por lo tanto,

$$M_{t_1} = \bigcup_{t_2\in\{0,1\}^{m_2}} M_{t_2}, \qquad \text{donde} \quad t_2(i) = t_1(i), \quad i \in \{1,\ldots,m_1\}.$$

Procediendo de manera inductiva, definimos

$$M_{t_{n+1}} = \overline{B}(x_{t_{n+1}}, \frac{1}{n+1}) \cap M_{t_n}, \qquad \text{con} \quad \operatorname{diam}(M_{t_{n+1}}) \leq \frac{2}{n+1}$$

y tenemos que

$$M_{t_n} = \bigcup_{t_{n+1}\in\{0,1\}^{m_{n+1}}} M_{t_{n+1}}, \qquad \text{donde} \quad t_{n+1}(i) = t_n(i), \quad i \in \{1,\ldots,m_n\}.$$

Definimos la función $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to X$ de la siguiente manera:

si $s_i = (\overbrace{01}^{m_1} | \overbrace{001}^{m_2} | \overbrace{1100\ldots}^{m_3} | \ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (dirección buscando destinatario), entonces se tiene que (*c.f.* Teorema 2.4.6)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{M_{t_n} : t_n(i) = s(i), i \in \{1,\ldots,m_n\}\} \neq \varnothing \qquad \left(\operatorname{diam}(M_{t_n}) = \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)$$

y definimos

$$f(s_i) = x, \qquad \text{donde} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \{M_{t_n} : t_n(i) = s(i), i \in \{1, \dots, m_n\} = \{x\}.$$

Con la misma manera se establece que f es sobreyectiva: En efecto, cada $x \in X$ tiene al menos una dirección válida $\hat{s} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, donde $\hat{t} = (\hat{s}(1), \dots, \hat{s}(m_1)\} \in \{0,1\}^{m_1}$ determina el conjunto $M_{\hat{t}} := \overline{B}(x_{\hat{t}}, 1)$ de la primera partición de X, con $x \in M_{\hat{t}}$, luego los siguientes k_1 elementos $(\hat{s}(m_1+1), \dots, \hat{s}(m_2)\} \in \{0,1\}^{k_1}$ determinan el conjunto $M_{\hat{t_s}}$ de la segunda partición de X (que es la primera partición de $M_{\hat{t}}$), etc.

Mostramos que f es continua. Sea $s^n = (\varepsilon_1^n, \varepsilon_2^n, \dots, \varepsilon_i^n, \dots)$ y $s = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i, \dots)$, $(\varepsilon_i \in \{0,1\})$ tal que $s^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} s$ en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$). Entonces la sucesión $\{s^n(\ell)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es finalmente constante para cada $\ell \in \mathbb{N}$. Se deduce que para cada $\ell \in \mathbb{N}$, existe $n_\ell \in \mathbb{N}$ tal que $s^n(i) = s(i)$, para todo $i \in \{1, \dots, \ell\}$ y para todo $n \geq n_\ell$. Tomando $\ell = m_k$, $k \in \mathbb{N}$ (*c.f.* construcción anterior), concluimos que $f(s^n), f(s) \in M_{t_{m_k}}$, por lo tanto,

$$d(f(s^n), f(s)) \leq \operatorname{diam}(M_{t_{m_k}}) < 2/m_k,$$

de donde se concluye la continuidad de f. $\square$

Corolario 2.8.6 ***[Imágenes continuas de*** $[0,1]$***]*** *Los espacios* $[0,1]^k$, *(*$k \in \mathbb{N}$*) y* $[0,1]^{\mathbb{N}}$ *son imágenes continuas de* $[0,1]$.

DEMOSTRACIÓN: Por el Teorema 2.7.38 (Teorema de Tychonoff) los espacios métricos $X = [0,1]^k$ ($k \in \mathbb{N}$ o $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$ son compactos. Aplicando el Teorema 2.8.5 existe $\phi : \triangle \mapsto X$ continua y sobreyectiva. Extendemos ϕ a una función $\widetilde{\phi} : [0,1] \to X$ de la siguiente manera. Sea $(a,b) \subseteq [0,1] \setminus \Delta$ tal que $a, b \in \triangle$, luego

$$c = ta + (1-t)b \implies \widetilde{\phi}(c) = t\phi(a) + (1-t)\phi(b).$$

Es fácil comprobar que la función $\widetilde{\phi}$ es una extensión continua (afín) de la función ϕ a todo $[0,1]$. $\square$

En el caso $k = 2$, el resultado anterior afirma la existencia de una función (curva)

$$\gamma : [0,1] \mapsto [0,1]^2$$

continua y sobreyectiva. Dicha curva es conocida como *curva de Peano*.

Observación 2.8.7 [Universalidad de $[0,1]$**]** El resultado del Corolario 2.8.6 se puede extender a cualquier conjunto convexo compacto de un espacio normado, y más general, a cualquier conjunto convexo compacto *metrizable* de un espacio *vectorial topológico*[3] E. Estos espacios se estudiarán más adelante.

Concluimos esta parte con el siguiente resultado parcial sobre la universalidad isométrica del espacio de Banach $\mathcal{C}([0,1])$ dentro los espacios $\mathcal{C}(K)$ (K compacto convexo metrizable). Más adelante veremos que $\mathcal{C}([0,1])$ es un espacio universal para todos los espacios de Banach separables.

Corolario 2.8.8 ***[Universalidad isométrica de*** $\mathcal{C}([0,1])$***]*** *Sea* $K \subseteq E$ *un subconjunto no vacio, convexo, compacto y metrizable (c.f. Observación 2.8.7). Entonces existe una inyección lineal isométrica de* $\mathcal{C}(K)$ *al espacio de Banach* $(\mathcal{C}([0,1]), ||\cdot||_\infty)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\Phi : [0,1] \mapsto K$ una sobreyección continua. Definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{cases} T : \mathcal{C}(K) \mapsto \mathcal{C}([0,1]) \\ T(f) := f \circ \Phi. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que T es lineal. Luego

$$||T(f)||_\infty := \max_{t\in[0,1]} |(f\circ\Phi)(t)| = \max_{y\in K} |f(y)| := ||f||_\infty,$$

lo que muestra lo pedido. $\square$

[3] es decir, las funciones $(t,x) \mapsto t\cdot x$, $(t,x) \in \mathbb{R}\times E$ y $(x,y) \mapsto x+y$, $(x,y) \in E\times E$ son continuas.

Bibliografía

[1] Boss V. *Lecciones de Matemática. T5: Análisis funcional*, (traducido del ruso), Eds MIR, Moscu, USSR, (1987).

[2] Choquet G. *Cours d'Analyse. Topologie*, Masson, (1964).

[3] Conway J. *A Course in Point Set Topology*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, (2014).

[4] Dieudonne J. *Fondaments de l'Analyse Moderne*, Gauthiers-Villars, (1963).

[5] Dugundji J. *Topology*, Allyn and Bacon Boston (1966).

[6] Gelbaum B, Olmsted J. *Counterexamples in Analysis*, Dover Publications, (1964).

[7] Negrepontis S, Zachariadis Th, Kalamidas N, Farmaki V. *General Topology and Functional Analysis* (en griego), Edt Symmetria, (1997).

[8] Rudin W. *Principles of Mathematical Analysis*, Mc Graw Hill, (1965).

[9] Suppes P. *Axiomatic Set Theory*, Dover Publications, (1960).

Índice alfabético

Monografías del IMCA Nueva Serie

En las Monografías se publican temas actuales de investigación escritos de una manera expositiva por expertos en el área. Están destinados a servir como inicio en temas nuevos de investigación en matemática.

El IMCA y el Fondo Editorial de la UNI (EDUNI) se unen en este esfuerzo editorial para poner a disposición de la comunidad científica los trabajos de la Nueva Serie.

ISBN: 978-612-47971-0-1

9 786124 797101